

**DEVOIR N°14**  
**(A rendre le Jeudi 6 Février)**

Attention les trois parties sont liées.

**Partie I**

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x - \ln(x)$

- 1- Déterminer  $Dg$ .
- 2- Étudier les variations de  $g$  et dresser le tableau de variation de  $g$  sans les limites.
- 3- Donner le minimum de  $g$  sur  $Dg$
- 4- En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $Dg$ .

**Partie II**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - x \ln(x) + \frac{3}{2}$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative

- 1- Déterminer  $Df$ .
- 2- Calculer  $f'(x)$  et l'écrire en fonction de  $g(x)$
- 3- En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variation.

On donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- 4- Étudier la convexité de  $f$
- 5- Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse 1
- 6- Étudier position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$
- 7- Construire  $\mathcal{C}$  et  $T$ .  $\mathcal{C}$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $+\infty$

**Partie III**

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.

La fonction  $f$  modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où  $x$  désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note  $C(x)$  le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

$C$  est la fonction définie par  $C(x) = \frac{f(x)}{x}$

- 1- Déterminer  $D_C$
- 2- Donner l'expression de  $C$  sur  $D_C$
- 3- Étudier les variations de  $C$  sur  $D_C$
- 4- Dresser le tableau de variation de  $C$ . On donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = +\infty$
- 5- Quel est le prix de vente, à 0,1 euro près, d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice?