LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

CORRECTION DU DEVOIR N°14

Exercice 1 :

Attention les trois parties sont liées.

Partie I

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln(x)$

1- Déterminer Dg

g existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $\boldsymbol{Dg} = \mathbb{R}_+^*$.

2- Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g sans les limites.

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in Dg$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$\forall x \in Dg$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$

signe de $x-1$: $-$ $\underset{1}{\oplus}$ $+$

Conclusion : ***g* est décroissante sur]0,1[et est croissante sur [1, +∞[**

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

3- Donner le minimum de g sur Dg

Le minimum de g est 1

4- En déduire le signe de $g(x)$ sur Dg.

d'après le tableau de variation $\forall x \in Dg$, $g(x) \geq 1 > 0$.

Conclusion : *g* est positive sur *Dg*

Partie II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Dg

f existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}_+^*$.

2- Calculer $f'(x)$ et l'écrire en fonction de $g(x)$

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in Df$, $f'(x) = 2\times\dfrac{x}{2} + 1 - \left(1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x}\right) + 0 = x + 1 - \ln(x) - 1 = x - \ln(x) = g(x)$

3- <u>En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation.</u>
$\forall\, x \in Df\,, f'(x) = g(x)$ et g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **I.4**
donc $\forall\, x \in Df\,, f'(x) > 0$
et par suite f est croissante

<u>Conclusion :</u> *f* est croissante sur *Df*.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $3/2$	$\nearrow +\infty$

On donne $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4- <u>Étudier la convexité de f</u>
$\forall\, x \in Df\,, f'(x) = x - \ln(x) = g(x)$
f' est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables
$\forall\, x \in Df\,, f''(x) = g'(x)$. Le signe a été étudié à la question I.2

x	0		1		$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
convexité	‖	f est concave	point d'inflexion (1 ; 3)	f est convexe	

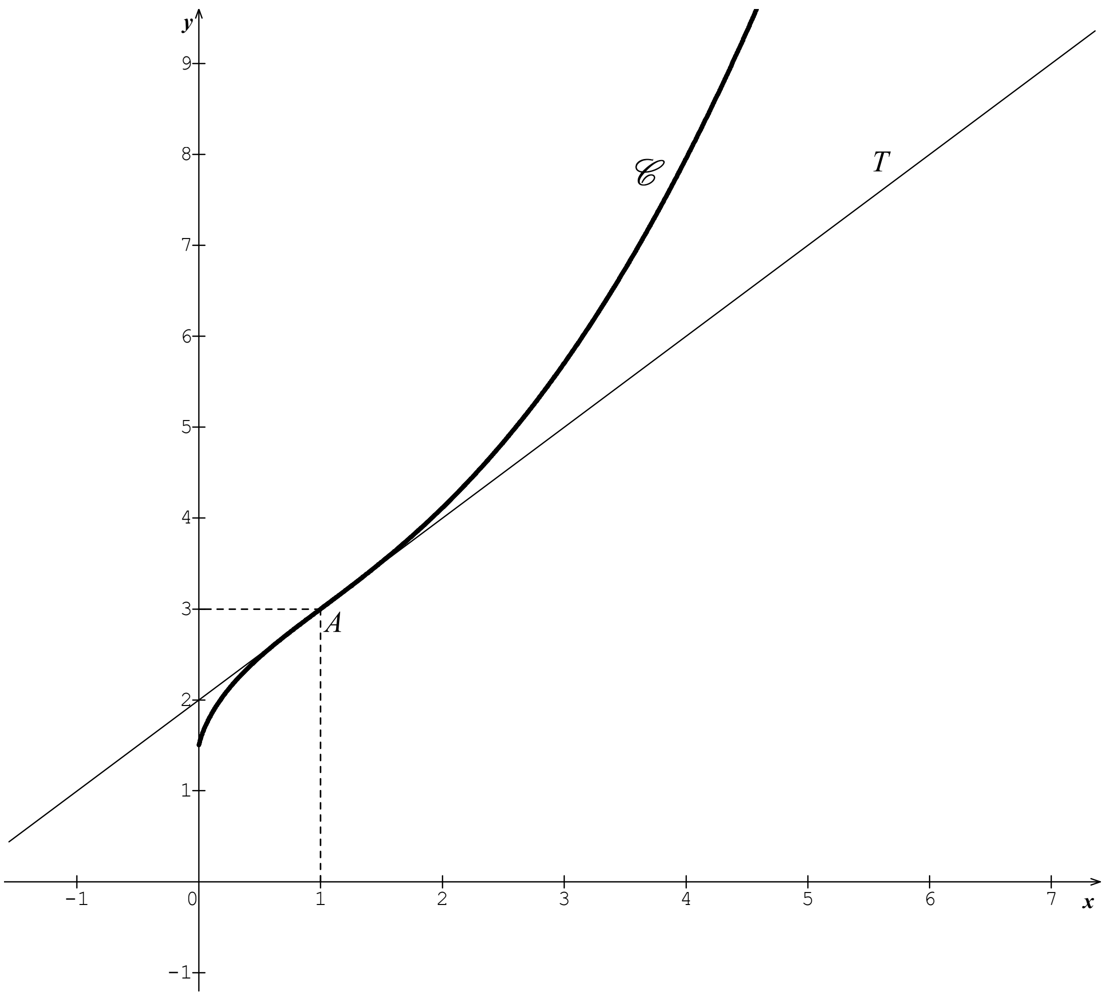
$f(1) = \dfrac{1}{2} + 1 - 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1+2+3}{2} = \dfrac{6}{2} = 3.$

5- <u>Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1</u>
Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donnée par
$T:\ y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = g(1) = 1$ et $f(1) = 3$
<u>Conclusion</u> $\boldsymbol{T}$**:** $\boldsymbol{y = 1(x-1)+3 = x+2.}$

6- <u>Étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T</u>
Si $x \leq 1$, f est concave donc $\mathscr{C}$ est en dessous de T
Si $x \geq 1$, f est convexe donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T
Au point d'inflexion , $\mathscr{C}$ coupe sa tangente .

7- <u>Construire $\mathscr{C}$ et T</u>

$\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Remarque: A est un point d'inflexion donc la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en A

Partie III

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.

La fonction f modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note $C(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

C est la fonction définie par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

1- Déterminer D_C ainsi que l'expression de C sur D_C

$f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - x\ln(x) + \dfrac{3}{2}$

$C(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \dfrac{3}{2x}$

C existe $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 0$ et la capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles donc $x \leq 5$

Conclusion : $\boldsymbol{D_C =]0,5]}$ **et** $\boldsymbol{\forall\, x \in D_C,\ C(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \dfrac{3}{2x}}$

2- <u>Étudier les variations de C sur D_C</u>

$\forall\, x \in D_C,\ C(x) = \frac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \ \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$

C est dérivable sur D_C comme somme de fonctions dérivables

$\forall\, x \in D_C\ ,\ C'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2x^2}$

$\forall\, x \in D_C\ ,\ x > 0$ donc $x+1 > 0$ et $2x^2 > 0$ et par suite $C'(x)$ est du signe de $x-3$

signe de $x-3$:

x	0		3		5
$x-3$		$-$	0	$+$	

<u>Conclusion</u> : *C* est décroissante sur]0,3] et est croissante sur [3, 5] .

3- <u>Dresser le tableau de variation de C .</u> On donne $\lim\limits_{x \to 0^+} C(x) = +\infty$

x	0		3		5
$C'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$C(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$C(3)$	$\nearrow$	$C(5)$

$C(3) = \frac{3}{2} + 1 - \ln(3) + \frac{3}{23} = \frac{3}{2} + 1 - \ln(3) + \frac{1}{2} = 3 - \ln(3)$

$C(5) = \frac{5}{2} + 1 - \ln(5) + \frac{3}{10} = \frac{38}{10} - \ln(5)$

4- <u>Quel est le prix de vente , à 0,1 euro près, d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice ?</u>

Le coût moyen minimal est $C(3) = 3 - \ln(3) \approx 1{,}9$

<u>Conclusion</u> : Le prix de vente ,à 0,1 euro près, d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice est 1,9 €.