CORRECTION DU DEVOIR N°13

Exercice 1 :

On se propose d'étudier la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$

On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$$

3- Calculer $f'(x)$ et donner son signe sur Df puis étudier les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme

$\forall x \in Df,\ f'(x) = 3x^2 - 2\times 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$

signe de $f'(x)$:

+	1/3	−	1	+

Conclusion :

***f* est croissante sur $\left]-\infty\,; \frac{1}{3}\right]$ et sur $[1\,; +\infty[$**

***f* est décroissante sur $\left[\frac{1}{3}\,; 1\right]$**

4- Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	85/27	↘	3	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1-6+9+81}{27} = \frac{85}{27}$$

$f(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$

5- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2 est donnée par

$T:\ y = f'(2)\,(x-2) + f(2)$ avec $f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5$ et $f(2) = 8 - 8 + 2 + 3 = 5$

Conclusion :

$\boldsymbol{T:\ y = 5(x-2) + 5 = 5x - 10 + 5 = 5x - 5}$

6- <u>Étudier la convexité de f.</u>

Pour étudier la convexité, il suffit d'étudier le signe de $f''(x)$

$\forall\, x \in Df,\ f\,'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f\,'$ est dérivable sur Df comme polynôme

$\forall\, x \in Df,\ f\,''(x) = 6x - 4$

x	$-\infty$	$2/3$	$+\infty$
$6x-4$	$-$	0	$+$
convexité	f est concave	$\left(\frac{2}{3}\ ; f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ est un point d'inflexion	f est convexe

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} + 3 = \frac{8-24+18+81}{27} = \frac{83}{27}$$

7- <u>Tracer $\mathscr{C}$ et T.</u>

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - n$

et (v_n) définie par $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}$

1- Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2

$u_1 = 3u_0 - 0 = 0$
$u_2 = 3u_1 - 1 = -1$

$v_1 = u_1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = 0 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$v_2 = u_2 - \dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{4} = -1 - 1 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{9}{4}$

2- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n et v_n

de $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - n$ il vient $u_k = 3u_{k-1} - (k-1) = 3u_{k-1} - k + 1$

de $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}$ il vient $v_k = u_k - \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{4}$

```
n=int(input('n='))
u=0 # u0
for k in range(1,n+1):
    u=3*u-k+1
    v=u-k/2-1/4
print('u=',u)
print('v=',v)
```

3- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$

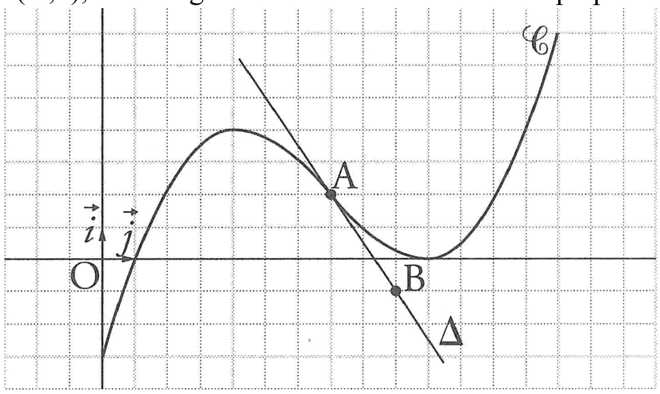
```
n=int(input('n='))
u=0 # u0
S=u
for k in range(1,n+1) :
    u=3*u-k+1
    S=S+u
print('S=',S)
```

4- Trouver une relation entre v_{n+1} et v_n

$$\begin{aligned}\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}\\ &= 3u_n - n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\\ &= 3u_n - \frac{3}{2}n - \frac{3}{4}\\ &= 3\left(u_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 3v_n\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n$

Exercice 3 :
On considère une fonction définie et dérivable sur $I = [0\ ;14]$.
Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
Elle passe par le point $A(7\ ;2)$, et la tangente en A à $\mathscr{C}$ est la droite Δ qui passe par le point $B\ (9\ ;\ -1)$.



1- Par lecture graphique

a) Dressons le tableau de variations de f. Indiquer le signe de $f'(x)$ sur I.

x	0		4		10		14
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-3	↗	4	↘	0	↗	7

b) Donnons le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ sur I.
Les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = -2$

Conclusion :
Il y a une unique solution à l'équation $f(x)=-2$

c) Donnons l'ensemble des réels tels que $0 \leq f(x) \leq 2$.
Les solutions de l'inéquation $0 \leq f(x) \leq 2$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situées entre les droites d'équation $y = 0$ et $y = 2$

Conclusion :
Soit S l'ensemble des solutions de l'inéquation S = [1,2] $\cup$ [7,12]

2- Que valent $f(7)$ et $f'(7)$? Écrivons une équation de Δ.
$f(7) = 2$

$f'(7)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A

$f'(7) = \frac{-3}{2}$

d'où Δ a pour équation $\Delta : y = f'(7)\ (x - 7) + f(7)$

$$y = \frac{-3}{2}(x - 7) + 2 = \frac{-3}{2}x + \frac{21}{2} + 2$$

Conclusion :
Δ admet pour équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}$

Exercice 4 :

La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés. Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.

On choisit au hasard un de ces DVD. On note :

D l'évènement « le DVD a été reçu en dotation »

U l'évènement « le DVD est de production européenne »

$\frac{1}{4}$ des DVD ont été reçu en dotation.

Parmi les DVD reçus en dotation , 65% proviennent de production européenne.

Et 76,25% des DVD sont de production européenne.

1- Donner la probabilité de U sachant D.

Parmi les DVD reçus en dotation , 65% proviennent de production européenne donc $\boldsymbol{p_D(U)=0{,}65}$

2- Calculer $p(\bar{D})$

$\boldsymbol{p(\bar{D})=1-P(D)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$

3- Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne

$p(D\cap U) = p(D)p_D(U) = \frac{1}{4}\times 0{,}65 = 0{,}1625$

<u>Conclusion</u> : la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne est 0,1625

4- Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

D et $\bar{D}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$p(U) = p(U\cap D) + p(U\cap\bar{D})$

$p(U\cap\bar{D}) = p(U)\text{-}p(U\cap D) = 0{,}7625 - 0{,}1625 = 0{,}6$

<u>Conclusion</u> : la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

5- Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

$p(\bar{D}) = \frac{3}{4} \neq 0$ donc $p_{\bar{D}}(U) = \dfrac{p(\bar{D}\cap U)}{p(\bar{D})} = \dfrac{0{,}6}{\frac{3}{4}} = 0{,}6\times\frac{4}{3} = 0{,}2\times 4 = 0{,}8$

<u>Conclusion</u> : la probabilité que le DVD choisi soit de production européenne sachant qu'il a été acheté est 0,8

6- On choisit trois DVD au hasard. On admet que le nombre de DVD est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à trois tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ».

On note D_i l'événement : «le DVD n°i a été reçu en dotation »

On note X le nombre de DVD reçus en dotation

$P(X=2) = P\left(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}\right) \cup \left(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) \cup \left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3\right)$

$= P\left(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}\right) + P\left(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3\right)$ car les événements sont disjoints

$= P(D_1)P(D_2)P\left(\overline{D_3}\right) + P(D_1)P\left(\overline{D_2}\right)P(D_3) + P\left(\overline{D_1}\right)P(D_2)P(D_3)$ car les choix sont indépendants

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

<u>Conclusion</u> : la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ». est $\mathbf{\frac{3}{64}}$