LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**
EC1

FEUILLE D'EXERCICES N°14
APPLICATIONS DES DÉRIVÉES

RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien
② Comment déterminer un ensemble de définition (les 3 questions)
③ Rappeler la résolution de $x^2 = a$ suivant les valeurs de a
④ Donner les formules de résolution d'une équation de degrés 2 et axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x
⑤ Comment résoudre une équation ou une inéquation avec ln et exp
⑥ Comment calculer $P_A(B)$, $P(A\cap B)$.Que veut dire deux évènements incompatibles ? Que veut dire deux évènements indépendants ?
⑦ Comment étudier le sens de variation d'une suite
⑧ Donner l'équation de la tangente et formulaire des dérivées
⑨ Définition de la parité d'une fonction et ses conséquences graphiques

PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$
et (v_n) la suite définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 3$

1- Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1
2- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n et v_n
3- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$
4- Trouver une relation entre v_{n+1} et v_n
5- Écrire un programme `Python` qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^3$

Exercice B:
Résoudre les inéquations suivantes : $5^n \geq 200$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{10}$

Exercice C:
Compléter les inégalités:
si $1 \leq x \leq 2$ alors $\ldots \leq x+1 \leq \ldots$

$$\ldots \quad \frac{1}{x+1} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \frac{1}{x+1}+3 \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ln\left(\frac{1}{x+1}+3\right) \quad \ldots$$

Exercice 1 :

Étudier les fonctions suivantes : ensemble de définition, sens de variations ,tableau de variations, convexité et allure de courbe.

1- $f(x)=x^2+4x-1$
2- $f(x)=-x^3+3x+1$
3- $f(x)=\ln(x+3)$
4- $f(x)=e^{-2x}$
5- $f(x)=2^x$
6- $f(x)=(x^2+1)e^x$
7- $f(x)=x\ln(x)-x$
8- $f(x)=xe^{-x}$
9- $f(x)=\ln(\ln(x))$

Exercice 2 : **un premier exemple de fraction rationnelle**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-5}{x+2}$ .On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df
2- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?
3- On donne $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites
4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
5- Étudier la convexité de f
6- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T
7- Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 3 : **un exemple d'asymptote oblique**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ .On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df.
2- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?
3- Montrer que la droite D d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
5- On donne $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$. Que peut on conclure ?
6- Étudier la convexité de f
7- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T
8- Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 4 : **Étude avec une fonction auxiliaire**

Notons f et g les fonctions définies $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x\ln(x)$ et $g(x)=\ln(x)-x+1$

1- Déterminer Dg.
2- Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations sans les limites.
3- En déduire le signe de $g(x)$ sur Dg
4- Déterminer Df et étudier la parité de f.
5- Montrer que $\forall\, x\in Df$, $f\,'(x)=g(x)$
6- Dresser le tableau de variations de f sans les limites

Exercice 5 : **Étude d'une fonction avec ln**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ .On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df .
2- On donne $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. Que peut-on conclure ?
3- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
4- Étudier la convexité de f
5- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 puis étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T
6- Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 6 : **Étude d'une fonction avec des exponentielles**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3-2x}{e^x}$ .On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df .
2- Écrire f sous forme d'un produit

On donne $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

3- On donne $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. Que peut-on conclure ?
4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
5- Étudier la convexité de f
6- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
8- Étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T
9- Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 7 :

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

1- La fonction f est-elle continue sur $]-3,+\infty[$?
2- Donner un intervalle où f est continue mais pas monotone.
3- Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
4- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ en justifiant la réponse.
5- L'équation $f(x)=3$ admet-elle une solution unique ?

Exercice 8 :

1-

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$. Justifier la réponse avec précision.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.

2-

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	10	↘	1

a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier la réponse avec précision.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.

3-

x	$-\infty$		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	-4	↗	-2

a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier la réponse avec précision.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.

<u>Exercice 9 :</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$

1- Déterminer Df .
2- On admet que la droite D d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$. Traduire cette information sous forme de limite et déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

3- Montrer que $\forall\, x \in Df,\ f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$
4- Étudier les variations de la fonction f sur Df puis dresser le tableau de variations .

On donne $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

5- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
6- Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f .

<u>Exercice 10 :</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x$.

1- Déterminer Df .
2- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations sans les limites ,
3- Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$

<u>Exercice 11 :</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^x - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df .

2- On donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ Que peut-on conclure ?

On donne aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

3- Dresser le tableau des variations de f.

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

5- Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

6- Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

<u>Exercice 12 :</u>

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1- $f(x) = x^3 + 5x - 7$

2- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$

3- $f(x) = e^x - x$

4- $f(x) = \ln(x+1) - x$