LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

CORRECTION DU DS N°03

EXERCICE 1.

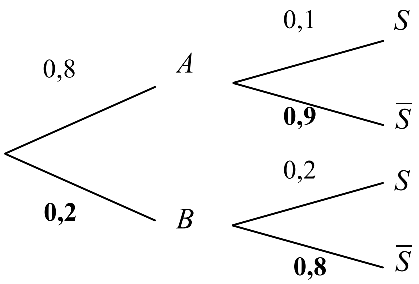
Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs.
Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.
10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- l'événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- l'événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- l'événement S: « la boîte présente des traces de pesticides ».

1- Quelle est la probabilité de l'événement $B\cap\overline{S}$?

Établissons un arbre pondéré de la situation



$$P(B\cap\overline{S}) = P(B)P_B(\overline{S}) = (1-P(B))(1-P_B(S)) = 0{,}2\times 0{,}8 = 0{,}16$$

Conclusion : $\boldsymbol{P(B\cap\overline{S})=0{,}16}$

2- Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

A et B forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}P(\overline{S}) &= P(\overline{S}\cap A) + P(\overline{S}\cap B)\\ &= P(A)P_A(\overline{S}) + P(\overline{S}\cap B)\\ &= P(A)(1-P_A(S)) + P(\overline{S}\cap B)\\ &= 0{,}8\times 0{,}9 + 0{,}16\\ &= 0{,}72 + 0{,}16 = 0{,}88\end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{P(\overline{S})=0{,}88}$

3- On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12 \neq 0$

$P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

Conclusion : la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B sachant que la boîte prélevée présente des traces de pesticides est $\dfrac{1}{3}$

4- Le gérant d'un salon de thé achète 3 boîtes indépendamment chez le grossiste précédent

a) Calculer la probabilité que les 3 boîtes soient sans trace de pesticides.

On note X le nombre de boîtes ne présentant aucune trace de pesticides
et S_k l'événement « la $k^{\text{ième}}$ boîte présente des traces de pesticides ».

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}\right) \\ &= P\left(\overline{S_1}\right)P\left(\overline{S_2}\right)P\left(\overline{S_3}\right) \quad \text{car les choix des boites sont indépendants} \\ &= (0{,}88)^3 \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que les 3 boîtes soient sans trace de pesticides est $(0{,}88)^3$

b) Calculer la probabilité qu'au moins 1 boîte ne présentent aucune trace de pesticides.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \\ &= 1 - P(S_1)P(S_2)P(S_3) \quad \text{car les choix des boites sont indépendants} \\ &= 1 - (0{,}12)^3 \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité qu'au moins 1 boîte ne présentent aucune trace de pesticides est $1-(0{,}12)^3$

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$ .On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df

f existe $\Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

Conclusion : $Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

2- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question suivante

3- Montrer que la droite D d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

$$f(x) - y_D = \frac{x^2+2x-3}{x+1} - (x+1) = \frac{x^2+2x-3-(x+1)^2}{x+1} = \frac{x^2+2x-3-x^2-2x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

<u>Conclusion</u> : la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = \dfrac{-4}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-4	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y_D$	$+$		$-$
position	$\mathscr{C}$ est au-dessus de D		$\mathscr{C}$ est en dessous de D

4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.

f est dérivable sur chaque intervalle de Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall\, x \in Df,\ f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 1(x^2+2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}$$

$\forall\, x \in Df$, $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+5

$\Delta = 2^2 - 4\times1\times5 = = 4-20 = -16$ donc $\forall\, x \in Df$, $x^2+2x+5 > 0$ (signe de $a = 1$ partout car $\Delta<0$)

<u>Conclusion</u> :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

***f* est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$**

5- On donne $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$. Que peut on conclure ?

La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

6- Étudier la convexité de f

$f\,'$ est dérivable sur chaque intervalle de Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall\, x \in Df, f\,''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+5)(2\times 1(x+1))}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)((x+1)(x+1)-(x^2+2x+5))}{(x+1)^4} \quad \text{car } 2x+2 = 2(x+1)$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+2x+1-x^2-2x-5)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2(x+1)(-4)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-8}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-8	$-$		$-$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
$f\,''(x)$	$+$	‖	$-$
convexité	f est convexe	‖	f est concave

Remarque : $(x+1)^3$ a le même signe que $x+1$

7- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T

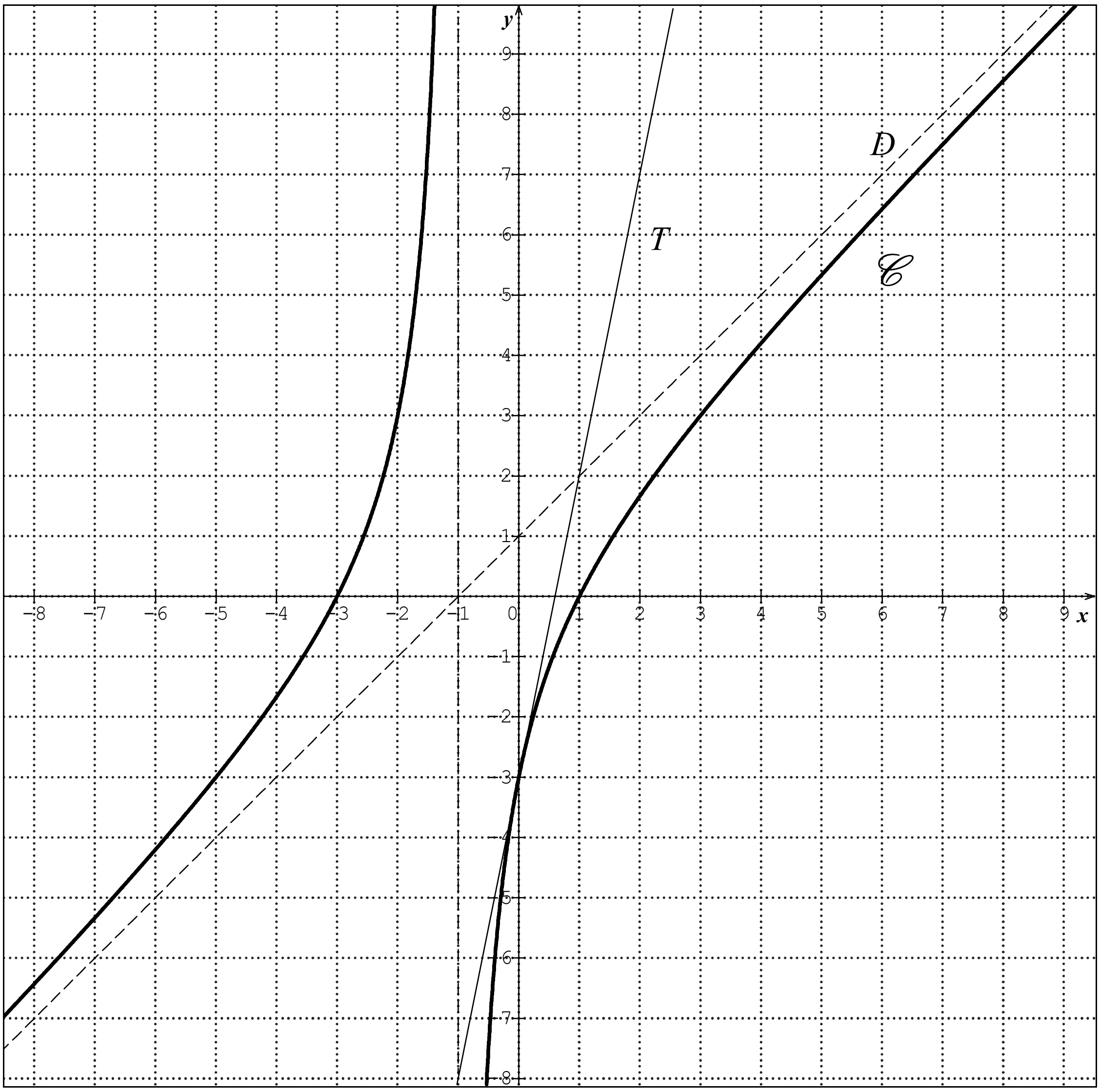
Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par

T : $y = f'(0)\,(x-0)+f(0)$ avec $f'(0) = 5$ et $f(0) = -3$

Conclusion $\boldsymbol{T}$**:** $\boldsymbol{y = 5(x-0)-3 = 5x-3}$

De plus au voisinage de 0, f est concave donc $\mathscr{C}$ est en dessous de T

8- Construire $\mathscr{C}$ et T



EXERCICE 3.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative .

1- <u>Déterminer Df</u>

f existe $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$

or $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3$

$\Delta < 0$ donc $x^2 + x + 1$ est du signe de $a = 1$

donc $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0$ et par suite $Df = \mathbb{R}$

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

2- <u>Montrer que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln(3)-2\ln(2)$ en citant les formules utilisées puis donner une valeur approchée de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$</u>

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)\\
&= \ln\left(\frac{1-2+4}{4}\right)\\
&= \ln\left(\frac{3}{4}\right)\\
&= \ln(3)-\ln(4) \qquad \text{car } \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)\\
&= \ln(3)-\ln(2^2)\\
&= \ln(3)-2\ln(2) \qquad \text{car } \ln(a^x)=x\ln(a)
\end{aligned}$$

de plus $\ln(3)\approx 1{,}1$ et $\ln(2)\approx 0{,}7$ donc $f\left(-\frac{1}{2}\right)\approx -0{,}3$

<u>**Conclusion**</u> **:** $\boldsymbol{f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln(3)-2\ln(2)\approx -0{,}3}$

3- <u>Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$</u>

f est dérivable sur Df comme composé de fonctions dérivables

$\forall\, x \in Df\,,\, f\,'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$\forall\, x \in Df\,,\;\; 1+x+x^2>0$ donc $f\,'(x)$ est du signe de $2x+1$

signe de $2x+1$: $-$ ⓪ $+$ (en $-1/2$)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2\ln(2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$ et $-\infty$

4- <u>Résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x</u>

$f(x)=0$

$\ln(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=e^0$

$x^2+x+1=1$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$ $\qquad$ $c=0$, je factorise par x

$x=0\in Df$ $\qquad$ et $\qquad$ $x=-1\in Df$

Conclusion : **S={0, −1}**

Remarque :$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : (0; 0) et (−1; 0)

5- a) Déterminer une équation de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse −1.

Une équation cartésienne de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse −1 est donnée par

T_{-1} : $y = f'(0)\,(x-0)+f(0)$ avec $f\,'(-1) = \dfrac{-2+1}{1} = -1$ et $f(-1) = \ln(1) = 0$

Conclusion T_{-1}: $\boldsymbol{y = -1(x+1)+0=-x-1}$

b) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Une équation cartésienne de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par

T_0 : $y = f'(0)\,(x-0)+f(0)$ avec $f\,'(0) = \dfrac{1}{1} = 1$ et $f(0) = \ln(1) = 0$

Conclusion $\boldsymbol{T_0}$: $\boldsymbol{y = = 1(x-0)+0=x}$

6- a) Calculer la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout réel x on a: $f\,''(x) = \dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$f\,'$ est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall\, x \in Df,\ f\,''(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2x+2-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

Conclusion : $\forall\, \boldsymbol{x \in Df,\ f\,''(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}}$

b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $\mathscr{C}$ admet exactement deux points d'inflexions aux points d'abscisses $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ dont vous donnerez des valeurs approchées

$\forall\ x \in Df$, $x^2+x+1>0$ donc $f\,''(x)$ est du signe de $-2x^2-2x+1$

$\Delta = (-2)^2-4(-2)(1) = 4+8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ car $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \in Df$ $\qquad x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \in Df$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$ donc $x_1 \approx 0{,}35$ et $x_2 \approx -1{,}35$

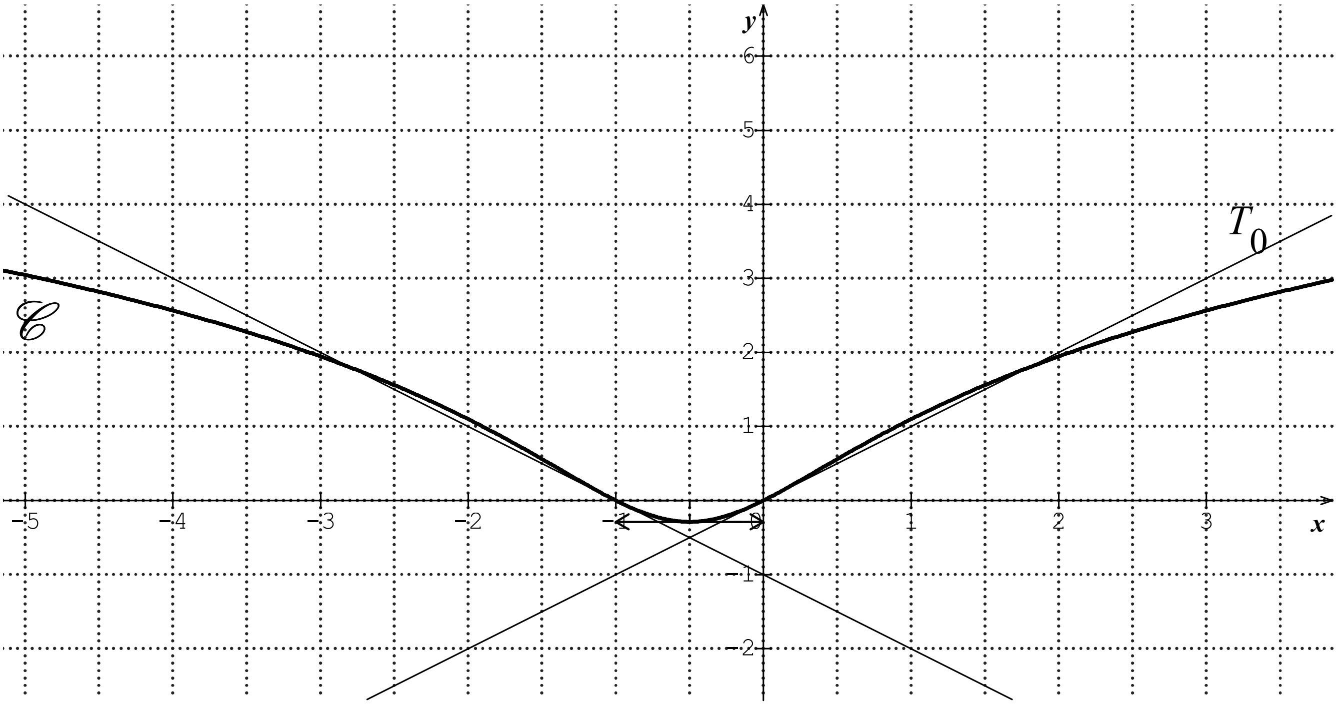
x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f\,''(x)$		−	0	+	0	−	
convexité		f est concave	A point d'inflexion	f est convexe	B point d'inflexion	f est concave	

$f''(x)$ s'annule 2 fois en changeant de signes donc existence de deux points d'inflexions A et B

A a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\ ,f\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

B a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\ ,f\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

7- Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$



EXERCICE 4.

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - e^x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df
$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

2- On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Que peut on en déduire sur la courbe $\mathscr{C}$
La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$

3- Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et la droite D d'équation $y = 0$
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$
$\forall\, x \in Df$, $e^x > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $e^x - 1$

Pour étudier le signe de $e^x - 1$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $e^x - 1 \geq 0$
$e^x - 1 \geq 0$
$e^x \geq 1$
$x \geq \ln(1)$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \geq 0$

signe de $e^x - 1$: $-$ 0 $+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_D$	$-$	0	$+$
position	**$\mathscr{C}$ est en dessous de D**	**$\mathscr{C}$ coupe D en (0 ; 0)**	**$\mathscr{C}$ est au-dessus de D**

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

4- Montrer que $\forall\, x \in Df$, $f'(x) = e^x(2e^x - 1)$

f est dérivable sur Df comme différence de fonctions dérivables
$\forall\, x \in Df, f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$

<u>Conclusion :</u> $\boldsymbol{\forall\, x \in Df, f'(x) = e^x(2e^x - 1)}$

5- Étudier le sens de variation de f
$\forall\, x \in Df, f'(x) = e^x(2e^x - 1)$

$\forall\, x \in Df$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2e^x - 1$

Pour étudier le signe de $2e^x - 1$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $2e^x - 1 \geq 0$
$2e^x - 1 \geq 0$
$e^x \geq \frac{1}{2}$

$x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \geq -\ln(2)$

signe de $2e^x - 1$: $\quad - \quad 0 \quad +$ ($-\ln(2)$)

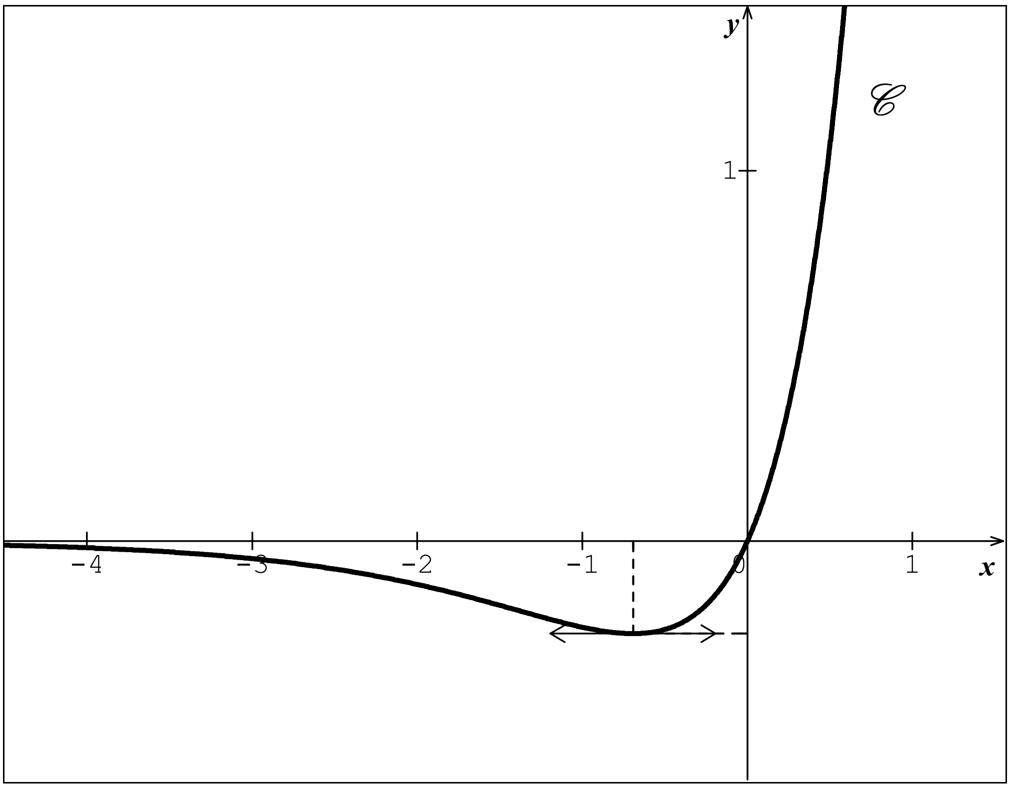
<u>Conclusion :</u> *f* est croissante sur [$-$ln(2), +∞[et *f* est décroissante sur]-∞ , $-$ln(2)] et sur $\mathbb{R}_+^*$

6- <u>Dresser le tableau de variation de *f*</u>

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	0	↘	-1/4	↗	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

7- <u>Construire $\mathscr{C}$</u>



EXERCICE 5.

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par:

- $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + n + 1$
- $\forall\, n \geq 1;\ w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

1- Calculer u_1 , u_2 , v_0, v_1, w_1, w_2 et w_3. On écrira w_3 sous la forme d'un seul logarithme

$u_1 = 3u_0 + 2\times 0 + 1 = 6 + 1 = 7$
$u_2 = 3u_1 + 2\times 1 + 1 = 21 + 2 + 1 = 24$

$v_0 = u_0 + 0 + 1 = 2 + 1 = 3$
$v_1 = u_1 + 1 + 1 = 7 + 1 + 1 = 9$

$$w_1 = \sum_{k=1}^{1} \ln(k) = \ln(1) = 0$$
$$w_2 = \sum_{k=1}^{2} \ln(k) = \ln(1) + \ln(2) = \ln(2)$$
$$w_3 = \sum_{k=1}^{3} \ln(k) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) = \ln(6)$$

2- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n et v_n

de $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$ on a $u_k = 3u_{k-1} + 2(k-1) + 1 = 3u_{k-1} + 2k - 1$

```
n=int(input('n='))
u=2 # u0
v=3 # v0
for k in range(1,n+1):
    u=3*u+2*k-1
    v=u+k+1
print('u=',u)
print('v=',v)
```

3- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

```
n=int(input('n='))
u=2 # u0
v=3 # v0
S=v
for k in range(1,n+1):
    u=3*u+2*k-1
    v=u+k+1
    S=S+v
print('S=',S)
```

4- Écrire un programme `Python` qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^5$

```
n=0
u=2 # u0
while u <10**5 :
    n=n+1
    u=3*u+2*n-1
print('n=',n)
```

5- Déterminer une relation entre v_{n+1} et v_n

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= u_{n+1}+(n+1)+1\\ &= 3u_n+2n+1+n+1+1\\ &= 3u_n+3n+3\\ &= 3(u_n+n+1)\\ &= 3v_n\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}=3v_n$

6- On admet que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n > 0$. Étudier le sens de variation de (v_n)

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}-v_n = 3v_n - v_n = 2v_n$
or $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n > 0$ d'où $2v_n > 0$ et par suite (v_n) est croissante

Conclusion : (v_n) **est croissante**

7- Étudier le sens de variation de (w_n)

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1}-w_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &= \ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(n)+\ln(n+1)-(\ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(n-1)+\ln(n))\\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n+1>1$ d'où $\ln(n+1)>0$ et par suite (w_n) est croissante

Conclusion : (w_n) **est croissante**

8- Écrire deux programmes `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche w_n

Méthode 1:

de $w_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, il vient $w_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\ln(k) = w_n+\ln(n+1)$ d'où $w_k = w_{k-1}+\ln(k)$ et $w_1 = 0$

```
import numpy as np
n=int(input('n='))
w=0   #w1
for k in range (2,n+1) :
    w=w+np.log(k)
print('w=',w)
```

Méthode 2:

```
import numpy as np
n=int(input('n='))
w=np.sum(np.log(k) for k in range(1,n+1))
print('w=',w)
```