FEUILLE D'EXERCICES N°14:
SUITES USUELLES

RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien
② Rappeler la résolution de $x^2 = a$ suivant les valeurs de a
③ Axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x
④ Rappeler la définition de la parité et ses conséquences graphiques
⑤ Rappeler le formulaire des dérivées et l'équation de la tangente
⑥ Rappeler comment on étudie la convexité.
⑦ Rappeler le théorème de la bijection
⑧ Comment étudier le sens de variation d'une suite

PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^2+11x-9\ln(x)-10$.On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df .

2- On donne $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ Que peut-on conclure ?

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

3- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.

4- Étudier la convexité de f

5- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 5 puis étudier position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T

6- Construire $\mathscr{C}$.

7- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 1 et α .

Exercice B:

Une usine fabrique des ampoules, dont 50% proviennent d'une machine M_1 , 30% proviennent d'une machine M_2 et 20% proviennent d'une machine M_3.

La probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse est différente selon les machines:

Elle vaut $\frac{3}{100}$ pour M_1 , $\frac{5}{100}$ pour M_2 et $\frac{15}{100}$ pour M_3.

Pour k = 1,2,3 on notera l'événement F_k: " l'ampoule qu'on examine a été fabriquée par M_k ".

Les fonctionnements des trois machines seront toujours supposés indépendants.

1- Donner $P(F_3)$ probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait été fabriquée par M_3.

2- Montrer que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est 0,06.

3- On suppose ici qu'une ampoule choisie au hasard s'est révélée défectueuse.
Quelle est la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par M_3 ?

Exercice 1 :

1- (u_n) est une suite arithmétique de raison 5, telle que $u_{11} = -10$. Calculer u_{12} puis u_{10}

2- (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_9 = 5$ et $u_{10} = 18$. Quelle est sa raison ?

3- (u_n) est une suite arithmétique de raison 7 et de terme initial $u_0 = -4$.Calculer u_4 puis u_{19}

Exercice 2 :

1- On considère la suite$(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$

a) Calculer u_0 , u_1, u_2

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n .

c) Démontrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Exprimer u_n en fonction de n

e) Déterminer la limite de (u_n)

f) Étudier les variations de (u_n)

2- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{2}$

a) Calculer u_1, u_2, u_3

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n .

c) Démontrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de (u_n)

e) Étudier les variations de (u_n)

f) Calculer $S = \sum_{k=1}^{5} u_k$ puis $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} T_n$

g) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de T_n (2 méthodes) .

3- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n+5$

a) Démontrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n .

c) Exprimer u_n en fonction de n . La suite (u_n) est-elle convergente?

d) Étudier les variations de (u_n)

e) Calcluer $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$

h) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de S_n (2 méthodes) .

4- Soit (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$

a) Exprimer u_n en fonction de n

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n .

c) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$

d) Calculer $u_2 + u_1 + \ldots + u_n$

e) Calculer $S_n = \sum_{k=5}^{n} u_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$

i) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de S_n (2 méthodes) .

<u>Exercice 3 :</u>

1- (v_n) est une suite géométrique de raison 5, telle que $v_8 = 10$. Calculer v_9 et v_7

2- (v_n) est une suite géométrique telle que $v_{10} = 3$ et $v_{11} = 12$. Quelle est sa raison ?

3- (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de terme initiale $v_1 = 0,05$. Calculer v_5 et v_{17}

<u>Exercice 4 :</u>

1- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$

a) Calculer u_0 , u_1, u_2

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

c) Démontrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de (u_n)

e) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^9$ par le calcul et par `Python`

2- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) Calculer u_1, u_2, u_3

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

c) Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géomérique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de (u_n)

e) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq \frac{1}{1024}$ par le calcul et par `Python`

f) Calculer $S = \sum_{k=1}^{5} u_k$ puis $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} T_n$

g) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de T_n (2 méthodes)

3- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times (-1)^n$

a) Démontrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est une suite géomérique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n

c) La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente ?

d) Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$

e) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de S_n (2 méthodes)

4- Soit (u_n) est la suite géomérique de premier terme $u_0 = -3$et de raison $q = 2$.

a) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de (u_n)

b) Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq -10^{-5}$ par le calcul et par `Python`

d) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$

e) Calculer $S_n = u_1 + \ldots + u_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 5 :

Dans chaque cas, déterminer si la suite (u_n) dont on donne le terme général est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

1- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$

2- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$

3- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$

4- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 7$

5- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$

6- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2}{3^n}$

7- $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$

Exercice 6 :

Calculer les sommes suivantes

$$A = \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} n$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

$$E = \sum_{k=2}^{n+1} 7^k$$

$$F = \sum_{k=0}^{n} 2^{3-k}$$

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

1- Calculer les 4 premiers termes de la suite

2- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

Soit (v_n) la suite définie par : pour tout entier n, $v_n = u_n + 1$.

3- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de v_n

4- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique

5- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

6- Déterminer la limite de (v_n) et de (u_n)

Exercice 8 :

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N} \ , \ 3u_{n+1} = 2u_n + 1$$

1- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

2- On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n\in\mathbb{N} \ , v_n = u_n - 1$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

5- Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer S_n et S'_n

6- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche S et S' de 2 manières

Exercice 9 :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall \ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

On désigne par (v_n) la suite définie par $\forall \ n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$.

1- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n

2- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique convergente.

3- Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n \leq 10^{-5}$ par le calcul et par `Python`

4- Étudier le sens de variation de (v_n)

5- En déduire le terme général de (u_n)

6- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ de 2 manières.

Exercice 10 :

Dans chacun des cas donner la nature de la suite puis exprimer u_n en fonction de n

1- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$

2- $\begin{cases} u_1 = -1 \\ \forall \ n \in \mathbb{N}^* , \ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

3- $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall \ n \in \mathbb{N}^*, \ 2u_n = 3u_{n-1} + 1 \end{cases}$