CHAPITRE 11 : VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

I- INTRODUCTION

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie truquée
La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.
On gagne 2 € pour chaque résultat " pile " et on perd 1 € pour chaque résultat " face ".

1) Quel est l'univers Ω des issues possibles ?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2) Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.
Quelles sont les valeurs prises par X ?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Quelle est la probabilité de l'évènement " obtenir un gain de 3 € " ?
On note cette probabilité $P(X = 3)$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

On obtient une nouvelle loi de probabilité sur l'ensemble des gains
E' = X(Ω) = {-3 ; 0 ; 3 ; 6 } ; nous la nommons **<u>loi de probabilité de X</u>** :

Gain x_i	-3	0	3	6	total
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$					

<u>Détail</u>

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

II- DEFINITIONS

1- <u>VARIABLE ALÉATOIRE</u>

Une variable aléatoire réelle ou simplement variable aléatoire (notée V.A.R.) est une application de Ω dans ℝ.

Parmi les variables aléatoires il y en a des discrètes et des continues.

- Pour les V.A.R. discrètes, les valeurs de la V.A.R. sont des valeurs isolées (en nombre fini ou en nombre infini mais dénombrables). X prend les valeurs $a_1, a_2, ..., a_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ définies par : $p_i = p(X = a_i)$. L'affectation des p_ii aux a_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité sur E' = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Cette loi, notée P ' ou P_X, est appelée **loi de *X***.

- Pour les continues, les valeurs de la V.A.R. sont des intervalles (exemple loi normale).

Remarque 1: Une variable aléatoire consiste à attribuer à chaque évènement un nombre réel . En général, X est le gain d'un jeu, le nombre de boules données, le nombre de cartes données, ...

Remarque 2:
Etant données deux variables aléatoires X et Y sur un même espace probabilisé (Ω, P) on peut considérer leur somme $X + Y$, différence $X - Y$, produit XY , etc. Ce sont d'autres variables aléatoires sur (Ω, P) .

2- Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité de la VAR X la donnée des couples des valeurs prises par X et des probabilités correspondantes
On la présente sous forme d'un tableau

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	total
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n	1

Dans la première ligne figurent les valeurs prises par X, et dans la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Remarque : En pratique pour déterminer une loi de probabilité, on détermine d'abord l'ensemble des valeurs prises par X puis on calcule les probabilités correspondantes

III- LES VALEURS TYPIQUES

1- L'espérance

a) Définition

On appelle espérance d'une V.A.R. X le nombre réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Remarque : L'espérance de X porte bien son nom car c'est la valeur moyenne pour X qu'on peut espérer sur un grand nombre d'expériences (ceci sera justifié plus tard par la Loi des Grands Nombres).

Exemple dans la cas précédent

x_i	-3	0	3	6	total
p_i					

b) Règle de calcul

1. Si X est une constante c alors $E(X) = c$
2. **$\forall$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX+b)=aE(X)+b$**
3. Soit X une V.A.R. sur (Ω, P) et f une fonction numérique alors $E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\times p_i$

Exemple si $f(x) = x^2$ Alors $E(f(X)) = E(X^2) =$

4. E (X-E(X)) = 0. La variable aléatoire X-E(X) est d'espérance nulle, elle est dite centrée

Remarque En général, E(XY) ≠ E(X) ×E(Y).

Exemple: Si X est une VAR tel que $E(X)=5$,calculer $E(3X+2)$

2- LA VARIANCE – L'ÉCART TYPE

On peut avoir 10 de moyenne en math en ayant toujours 10, ou au contraire, en alternant des 0 et des 20. Ainsi, la moyenne donne relativement peu d'information. Il en est de même de l'espérance d'une variable aléatoire.
Une fois qu'on connaît l'espérance d'une V.A.R. X, il est intéressant de savoir si X prend souvent des valeurs très éloignées de son espérance ou, au contraire, si X est plutôt concentré ".
Pour cela, il est naturel de considérer la V.A.R. $(X - E(X))^2$ qui est le carré de la distance entre X et son espérance.

a) Définition

Soit X une V.A.R. sur un espace probabilisé (Ω, P) .On appelle variance de X, et on note V (X) ou Var X , le nombre :
$V(X) = E[(X - E(X))^2]$

Remarque
Comme $V(X) \geq 0$, on peut poser $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Ce nombre s'appelle l' écart type de X. Tout comme V (X), il mesure la " dispersion "de X autour de son espérance

b) Le théorème de König-Huygens

C'est la formule pratique du calcul de la variance

$$\boldsymbol{V(X)=E(X^2) - (E(X))^2} \qquad \text{avec } E(X^2) = = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 p_i$$

Remarque
Il résulte de ce théorème que l'on a toujours $E(X^2) \geq (E(X))^2$

Exemple dans la cas précédent

c) Règle de calcul

Soit X une V.A.R. sur un espace probabilisé (Ω, P) .
$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{V(aX + b) = a^2 V(X)}$
$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Exemple: Si X est une VAR tel que $V(X) = 5$ calculer $V(3X+2)$ puis $\sigma(3X+2)$

IV- FONCTION DE REPARTITION

1- DÉFINITION

Soit X une VAR
On appelle fonction répartition de X est l'application F définie par
$F : \mathbb{R} \to [0\ ;\ 1]$
$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$

2- EXEMPLE

x_i	-10	-3	4	total
p_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	1

3- PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION REPARTITION

- $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) \in [0\ ;1]$
- F est croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- **$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\,,\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$**

4- " COMMENT RECUPERER LA LOI A PARTIR DE LA FONCTION DE REPARTITION ".

Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que les valeurs de X forment une suite croissante : $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$
Alors, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$