LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

FEUILLE D'EXERCICES N°15:

SUITE ET PROBABILITÉ

RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien
② Axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x
③ Rappeler les formules de $E(X)$ $V(X)$ et de la fonction de répartition
④ Rappeler le formulaire des dérivées. Rappeler l'équation de la tangente
⑤ Comment étudier les variations d'une fonction
⑥ Rappeler le théorème de la bijection et comment étudier la convexité.
⑦ Position d'une courbe et d'une droite. position d'une courbe et d'une tangente
⑧ Comment étudier le sens de variation d'une suite, rappeler le formulaire des suites arithmétiques ,géométriques
⑨ Rappeler la méthode d'étude des suites arithmético-géométrique

PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:

Reconnaître puis déterminer le terme général des suites suivantes :

1- $\forall\, n > 0,\quad a_{n+1} = -2a_n$ et $a_1 = 3$

2- $\forall\, n \geq 2\,,\quad 2b_n = b_{n-1}$ et $b_1 = 1$

3- $\forall\, n > 0,\quad c_{n+1} - c_n = 3$ et $c_1 = 10$

4- $\forall\, n \geq 0,\quad d_{n+1} = -\dfrac{1}{2}d_n + 12$ et $d_0 = 1$

5- $\forall\, n > 2,\quad e_n + e_{n+1} = 3$ et $e_2 = 3$

Exercice B:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$.On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df .

2- On donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ .Que peut-on conclure ?

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

3- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.

4- Étudier la convexité de f

5- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T

6- Construire $\mathscr{C}$.

7- Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solutions α et $\alpha \in [1, 2]$

Exercice 1:

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi «Ouverture culturelle ».

On admet que

- ⇨ 20% des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante;
- ⇨ 30% des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement « l'élève a choisi « Approfondissement » la n-ième semaine » et p_n la probabilité de l'évènement A_n. .

1- Donner p_1
2- Construire l'arbre de la situation.
3- Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.
4- Écrire un script `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n
5- Exprimer p_n en fonction de n.
6- (p_n) est-elle convergente .
7- Déterminer le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9 . Vous traiterez cette questions de deux manières : par le calcul et en utilisant `Python`

Exercice 2:

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.
On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « la société intervient durant le $n^{\text{ième}}$ mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.
Le bureau d'études a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- ❑ $p(I_1) = p_1 = 0{,}75$;
- ❑ sachant qu'il y a eu une intervention durant le $n^{\text{ième}}$ mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égal 0,04 ;
- ❑ sachant qu'il n'y a pas eu d'intervention durant le $n^{\text{ième}}$ mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égal à 0,64.

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$
2. En déduire $p_{n+1} = -0{,}6\,p_n + 0{,}64$.
3. Écrire un script `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Donner une valeur approchée de p_6 grâce à `Python`

Exercice 3:

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,5 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n , la probabilité de R_n et q_n , celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1-

- **a)** Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
- **b)** En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$
- **c)** Écrire un programme `Python` qui demande n à l'opérateur et qui affiche p_n

2- Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$

- **a)** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique
- **b)** Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
- **c)** Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4:

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7.

On note, pour n entier naturel non nul :

G_n l'événement : « Juliette gagne la $n^{\text{ième}}$ partie » ;

P_n l'événement : « Juliette perd la $n^{\text{ième}}$ partie ».

Partie A

1- Déterminer les probabilités $P(G_1)$ $P_{G_1}(G_2)$ et $P_{P_1}(G_2)$.

2- En déduire la probabilité $P(G_2)$

3- Calculer $P(P_2)$

Partie B

On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = P(G_n)$ et $y_n = P(P_n)$.

1- Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités $P_{G_n}(P_{n+1}), P_{G_n}(G_{n+1})$

2- Montrer que, pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6\, x_n + 0{,}3 y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}7 y_n \end{cases}$

3- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de x_n et de y_n

4- Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

- **a)** Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
- **b)** Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

5-

- **a)** Déduire du **3**, l'expression de x_n en fonction de n.
- **b)** Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.