LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

FEUILLE D'EXERCICES N°16:

VARIABLES ALÉATOIRES

RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien

② Rappeler la résolution de $x^2 = a$ suivant les valeurs de a

③ Axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x

④ Rappeler le formulaire des dérivées et l'équation de la tangente

⑤ Rappeler comment on étudie la convexité.

⑥ Rappeler le théorème de la bijection

⑦ Comment étudier le sens de variation d'une suite

⑧ Rappeler le formulaire des suites arithmétiques ,géométriques

⑨ Rappeler la méthode d'étude des suites arithmético-géométrique

PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:

On considère la suite (u_n) à terme positif définie par $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$

1- Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2- Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice B:

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$

1- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche la valeur de u_n

2- On pose $v_n = u_n + n + 1$. Montrer que (v_n) est géométrique

3- En déduire l'expression de v_n et de u_n en fonction de n

4- La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice C:

Dresser le tableau d'étude de signe de f dans les différents cas suivants

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Exercice D:

Démontrer que $\forall\, x \in \,]-1,\, +\infty[,\quad \ln(1+x) \leq x$

Exercice 1 :

On lance 15 fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de « 6 » obtenu sur les 15 lancers.

Écrire les probabilités suivantes en fonction de Y

1- Le dé est tombé 5 fois sur « 6 »
2- Le dé est tombé au moins une fois sur le « 6 »
3- Le dé est tombé au plus 3 fois sur le « 6 »
4- Le dé est tombé plus de 10 fois sur le « 6 »

Exercice 2 :

La loi de Probabilité de X est donnée par le tableau

x_i	0	2	3	5	7
p_i	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Calculer les probabilités suivantes

1- $P(X=5)$
2- $P(X>5)$
3- $P(X \leq 5)$
4- $P(X=0)$
5- $P(X \geq 2)$
6- $P(0<X<5)$

Exercice 3 :

La loi de probabilité d'une variable X est donnée par le tableau suivant

x_i	-2	1	11
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1- Calculer $E(X)$, $V(X)$ puis déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.
2- Déterminer l'espérance et la variance de $Y = 2X+1$

Exercice 4 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
La variable aléatoire X prend :

- ⇨ la valeur 0 si on tire sept, huit ou neuf ;
- ⇨ la valeur 5 si on tire dix ;
- ⇨ la valeur 10 si on tire valet, dame, roi ;
- ⇨ la valeur 20 si on tire un as.

1- Donner la loi de probabilité de X.
2- Calculer son espérance et son écart-type.
3- Déterminer sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.

Exercice 5 :
On distribue au hasard 150 bons d'achat à la sortie d'une parfumerie.
Parmi les bons d'achat offerts :

- ⇨ 5 donnent droit à 20 euros de réduction ;
- ⇨ 10 donnent droit à 10 euros de réduction ;
- ⇨ 40 donnent droit à 5 euros de réduction ;
- ⇨ les autres donnent droit à 2 euros de réduction.

Soit X la variable aléatoire qui donne le montant de la réduction offerte pour un bon d'achat distribué.

1- Donner la loi de probabilité de X.
2- Calculer $E(X)$.
3- Déterminer sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.

Exercice 6 :
Une boîte contient 31 jetons rouges, 18 jetons bleus et 1 jeton vert. Un jeu consiste à piocher un jeton dans la boîte .Pour jouer, il faut payer 2 euros. Ensuite, si on pioche un jeton rouge, on ne gagne rien. Si on pioche un jeton bleu, on gagne 1 euro. Et si on pioche le jeton vert, on gagne 50 euros. On note X le gain algébrique d'un joueur à la fin d'une partie.

1- Déterminer $X(\Omega)$.
2- Déterminer la loi de X.
3- Calculer $E(X)$. Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 7 :
Un dé cubique équilibré porte sur ses faces les numéros 1, 2, 2, 3, 3, 3.
On jette deux fois le dé et on désigne par X la variable aléatoire ayant pour valeur la somme des nombres apparus à chacun des deux lancers.
1- Déterminer la loi de probabilité de X.
2- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3- Déterminer sa fonction de répartition et la représenter graphiquement.

Exercice 8 :
Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il es réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T l'évènement : « le premier test est positif».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client».
On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
1- Déterminer les probabilités des évènements T et C.
2- La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a
b) Exprimer l'espérance de X en fonction de a
c) À partir de quelle valeur de a , l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices

Exercice 9 :

1- Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 2$ et $V(X) = 5$.

a) Calculer $E(3X-1)$ et $V(3X-1)$.

b) Calculer $E(-2X+1)$ et $V(-2X+1)$.

2- Paul effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux.

Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min.
Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Paul.
Quelle relation lie X et T ? En déduire $E(T)$ et $V(T)$.