

CORRECTION DU TEST N°16

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) une suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_1 = 1$

1- Donner u_n en fonction de n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 + (n-1)r = 1 - 4(n-1) = -4n + 5$$

2- Calculer u_8

$$u_8 = -4 \times 8 + 5 = -32 + 5 = -27$$

3- La suite (u_n) est elle convergente ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n) = -\infty$$

La suite (u_n) n'est pas convergente mais divergente

4- Calculer $S = u_2 + \dots + u_8$

$$u_2 = -4 \times 2 + 5 = -8 + 5 = -3$$

$$S = \frac{(8-2+1)(u_2 + u_8)}{2} = \frac{7(-3-27)}{2} = 7 \times \frac{-30}{2} = 7 \times (-15) = -105$$

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + 2$

1- Ecrire un script Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n

```
n=int(input('n='))
u=1 # u0
for k in range(1, n+1):
    u=-1/4*u+2
print(u)
```

2- Nature de la suite (u_n)

(u_n) est une suite arithmético-géométrique.

3- Donner u_n en fonction de n

- Recherche du point fixe

$$k = -\frac{1}{4}k + 2 \Leftrightarrow 4k = -k + 8 \Leftrightarrow 5k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{5}$$

- Suite auxiliaire

On définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{8}{5}$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{8}{5} \\ &= -\frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{5} \\ &= -\frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{5}\right) = -\frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{8}{5} = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = -\frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

• Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \frac{8}{5} = -\frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{5}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{5}$

4- La suite (u_n) est-elle convergente ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{8}{5} \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < -\frac{1}{4} < 1\right)$$