CHAPITRE 12 : LES LIMITES Acte I

I- LIMITES DES FONCTIONS USUELLES

1- Limites des fonctions usuelles en l'infini

Limites de la fonction $x \mapsto x^2$

Compléter le tableau suivant

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...	10^{100}
x^2									

Donc le carré d'une grande valeur est une grande valeur

On dira que la limite de *f* quand *x* tend vers en + ∞ est +∞ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$

x	1	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	...	-10^{100}
x^2									

On dira que la limite de *f* quand *x* tend vers en + ∞ est +∞ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$

Limites des fonctions usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x =$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 =$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$

x	1	10	10^2	10^4	10^6	10^8		...	10^{100}
$\sqrt{x}$									

Rappel : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Limites de la fonction de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Compléter le tableau suivant

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...	10^{100}
$\dfrac{1}{x}$									

L'inverse d'un nombre très grand est un nombre proche de 0

x	-1	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	...	-10^{100}
$\dfrac{1}{x}$									

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$

Limites de la fonction de $x \mapsto e^x$

On remarque que $e > 1$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x =$

x	-1	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	...	-10^{100}
e^x									

Rappel : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x =$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x =$

Remarque: On aurait pu aussi s'aider de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Limites de la fonction de $x \mapsto \ln(x)$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...	10^{100}
$\ln(x)$									

Rappel : $\ln(10^x) = x\ln(10)$ et pour information $\ln(10) \approx 2{,}3$

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \ln(x) =$

Remarque: On aurait pu aussi s'aider de la courbe représentative de la fonction ln

2- LIMITES EN UN POINT *a* DIFFERENT DE L'INFINI

Soit f une fonction définie sur Df

a) Si $a \in Df$

On cherche à déterminer $\displaystyle \lim_{x \to 1} (x^2 + 3)$

Soit f définie par $f(x) = x^2 + 3$ $Df =$ et 1 Df

Chercher la limite de f en 1 revient à chercher que vaudrait $f(x)$ pour x proche de 1
Et pour x proche de 1 , $f(x)$ "vaut" $f(1)$

Donc $\displaystyle \lim_{x \to 1} (x^2 + 3) =$

Soit f une fonction définie sur Df et $a \in Df$ alors $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) Si $a \notin Df$

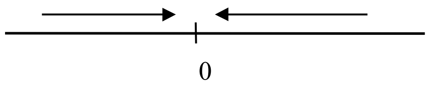
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

On cherche à déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

$Df =$ 0 Df

En d'autre terme on s'intéresse à ce que vaudrait $f(x)$ pour x proche de 0
Le problème qui se pose ici est qu'il y a 2 façons d'être proche de 0 :

* Soit par valeur positive
* Soit par valeur négative



♦ Etudions pour les valeurs positives

x	1	$0{,}1 = 10^{-1}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...	10^{-100}
$\dfrac{1}{x}$								

L'inverse d'un nombre proche de zéro est un nombre très grand

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} =$$

♦ Etudions pour les valeurs négatives

x	-1	$-0{,}1$	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	-10^{-5}	...	-10^{-100}
$\dfrac{1}{x}$								

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} =$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$
On cherche à déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)$

x	1	0,1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...	10^{-100}
$\ln(x)$								

<u>Rappel</u> : $\ln(10^x) = x\ln(10)$ et pour information $\ln(10) \approx 2{,}3$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) =$

<u>Remarque</u>: On aurait pu aussi s'aider de la courbe représentative de la fonction ln

II- LIMITES ET OPÉRATIONS

1- LIMITE D'UNE SOMME DE FONCTION

Hypothèse		Conclusion
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim\ [f(x) + g(x)]$
ℓ	m	
ℓ	$+\infty$	
ℓ	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

Remarque :

Dans le cas $(+\infty)+(-\infty)$, on ne peut pas déterminer la limite. C'est ce que l'on appelle une forme indéterminée notée FI.

Exemple :

Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \qquad \text{car} \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \end{array} \right.$$

2- LIMITE DU PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

Hypothèse		Conclusion	
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim\ [f(x) \times g(x)]$	
ℓ	m		
$\ell \neq 0$	$+\infty$		si $\ell > 0$
			si $\ell < 0$
$\ell \neq 0$	$-\infty$		si $\ell > 0$
			si $\ell < 0$
$+\infty$	$+\infty$		
$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$+\infty$		
0	$+\infty$		
0	$-\infty$		

Exemples :

♦ $\lim\limits_{x \to 0} (x+1)e^x =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (x+1) = \\ \lim\limits_{x \to 0} e^x = \quad . \end{cases}$

♦ Quelle est la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$?

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \end{cases}$

3- LIMITE DU QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

Hypothèse		Conclusion	
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	
ℓ	$m \neq 0$		
$\ell \neq 0$	∞		
0	∞		
$+\infty$	$m \neq 0$		$m > 0$
			$m < 0$
$-\infty$	$m \neq 0$		$m > 0$
			$m < 0$
∞	∞		
$\ell \neq 0$	0^+		$\ell > 0$ ou $+\infty$
			$\ell < 0$ ou $-\infty$
$\ell \neq 0$	0^-		$\ell > 0$ *ou* $+\infty$
			$\ell < 0$ ou $-\infty$
0	**0**		

Exemples :

♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{2x+1} =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = \end{cases}$

♦ Etude de la limite en 1 de la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to 1} (x-2) =$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) =$.

Pour conclure, il est nécessaire de distinguer les cas $x > 1$ (limite à droite) et $x < 1$ (limite à gauche) et faire un tableau d' étude de signes du dénominateur ou un axe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$x-1$	

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-2) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0^+ \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-2) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1) = 0^- \end{cases}$

4- Racine carrée d'une fonction

Hypothèse	Conclusion
$\lim f(x)$	$\lim \sqrt{f(x)}$
$\ell \geq 0$	
$+\infty$	

5- Ln d'une fonction

Hypothèse	Conclusion
$\lim f(x)$	$\lim \ln(f(x))$
0^+	
$+\infty$	

6- exponentielle d'une fonction

Hypothèse	Conclusion
$\lim f(x)$	$\lim e^{f(x)}$
$-\infty$	
$+\infty$	

Conclusion : les formes indéterminées (c'est à dire qu'on ne peut pas conclure directement) sont :

IV- COMMENT ENLEVER UNE FORME INDÉTERMINÉE EN L'INFINI

1- Cas d'un polynôme

La limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de son monôme de plus haut degré

Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty}$

2- CAS D'UNE FRACTION RATIONNELLE

La limite d'un fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) en l'infini est égale à la limite des quotients des monômes de plus haut degré

Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x+1} = \lim_{x \to +\infty}$$

3- CAS DE LN ET EXP

Théorème des croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x =$$

Remarque 1 : limites de références

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x =$$

Remarque 2 : limites particulières en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

4- CAS GÉNÉRAL

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ i.e. “ le plus fort ”.

V- COMMENT ENLEVER UNE FORME INDÉTERMINÉE DU TYPE 0/0

On factorise numérateur et dénominateur

Exemple :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2}$$