LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**
EC 1

CONCOURS BLANC N°02
Durée 4h

Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1- Écrire un programme python qui demande n à l'utilisateur et qui calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n

2- Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

3- Donner v_n en fonction de n puis en déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$

4- Montrer que la suite u peut s'écrire sous la forme $u = t + w$ où t est une suite géométrique et w une suite arithmétique à déterminer.

5- Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

6- Compléter le script Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche S_n

```
n=int(input('n='))
u=..............
S=..............
for p ..............
    u=..............
    ..............
print('S',S)
```

7- La suite (S_n) est-elle convergente?

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 8\ln(x) - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

Le but de cet exercice est de déterminer le signe de $f(x)$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df

2- On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

3- Dresser le tableau de variation de f

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$ sur Df

5- Calculer f (1). Que pouvez-vous en déduire

6- Montrer que $\beta \in [2, 4]$

7- Compléter le programme Python qui détermine β à 10^{-2} près.

```
import ..................
def f(x):
    ..................

a,b=2,4
while ..................
    m=..................
    if f(m)*f(b)>0:
        ..................
    else :
        ..................
print(m)
```

8- Déterminer le signe de $f(x)$

EXERCICE 3.

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0, 1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul G_n l'évènement "le joueur gagne la n-ième partie" et p_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1- Montrer que $p_2 = 0{,}62$.

2- On suppose (dans cette question uniquement), que le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3- Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$

5- Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

6- Compléter les deux programmes `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n

```
# programme 1
n=int(input('n='))
p=.......
for i in .............
    .............
print('p=',p)
```

```
# programme 2
n=int(input('n='))
p=.............
print('p=',p)
```

7- Déterminer la limite de la suite (p_n).

8- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ par le calcul

On donne $\dfrac{\ln\left(\dfrac{10^{-7}}{0{,}65}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)} \approx 9{,}36$

9- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ par un programme `Python`

EXERCICE 4.

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note :
T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif »
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio »

1- Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré si cela est possible

2- Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

3- Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

4- Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio

5- Les évènements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.

6- Calculer la probabilité de l'évènement $T \cup B$ puis interpréter ce résultat.

7- Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).Soit X la somme d'argent reçue par un ménage.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.
c) Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement

EXERCICE 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+e^x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df.

2- Tracer la courbe représentative de l'exponentielle et rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

3- **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4- On définit les droites D d'équation $y = 0$ et D' d'équation $y = 4$.
a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D'
b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D

5- **a)** Calculer la dérivée de f et déterminer le signe f'
b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

6- **a)** Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$
b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

7- Tracer l'allure de la courbe représentative de f, les asymptotes D et D' et la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 6.

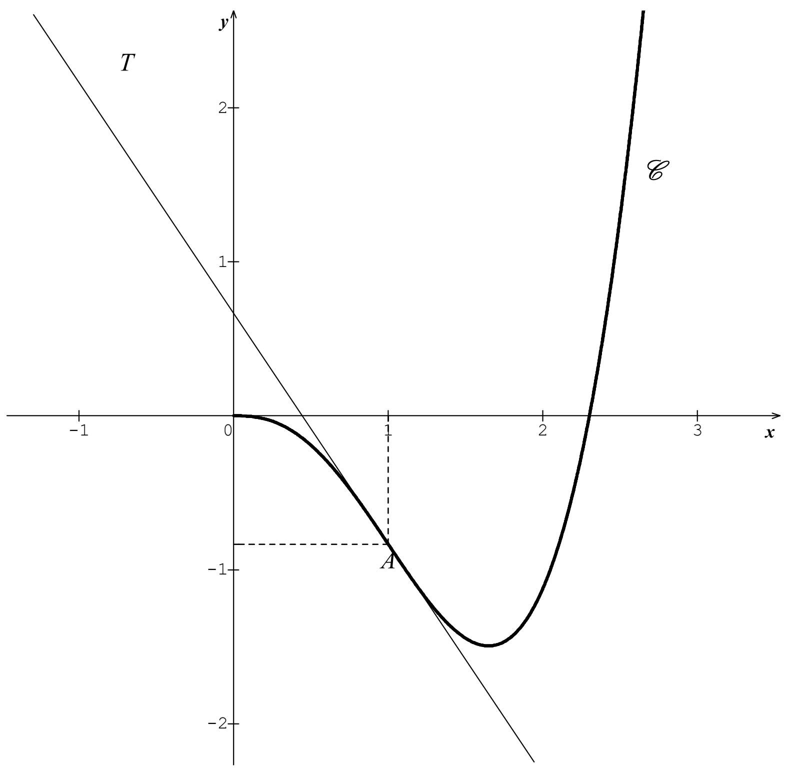
On a programmé une fonction en `Python`

```
import numpy as np
def f(coucou):
    velo=coucou**3*(np.log(coucou)-5/6)
    return velo
```

1- Quelle est l'expression de cette fonction notée f

2- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df

3- Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous par un logiciel dans un repère orthonormé et la droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1



- Par lecture graphique donner la limite de f en $+\infty$
- Que représente A pour la courbe ?

4- Montrer que $\forall\, x \in Df,\ f\,'(x) = 3x^2\left(\ln(x) - \dfrac{1}{2}\right)$

5- Étudier le sens de variation de f

6- Dresser le tableau de variation de f

7- Étudier la convexité de f et retrouver le point A.