**<u>CORRECTION DU CONCOURS BLANC N°02</u>**

# EXERCICE 1.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = 4u_n - 6n + 15$

**1-** <u>Écrire un programme python qui demande $n$ à l'utilisateur et qui calcule et affiche les valeurs de $u_n$ et $v_n$</u>

De $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$ il vient $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 1$ d'où $u_k = \frac{1}{3}u_{k-1} + (k-1) - 1 = \frac{1}{3}u_{k-1} + k - 2$

et $v_k = 4u_k - 6k + 15$

```python
n=int(input('n='))
u=1  #u0
v=19 #v0=4*u0-6*0+15
for k in range (1,n+1):
    u=1/3*u+k-2
    v=4*u-6*k+15
print('u=',u)
print('v=',v)
```

**2-** <u>Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.</u>

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{R},\ v_{n+1} &= 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 \\ &= 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6n - 6 + 15 \\ &= \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15 \\ &= \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) \\ &= \frac{1}{3}v_n\end{aligned}$$

**<u>Conclusion</u> : $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0$=19**

**3-** Donner $v_n$ en fonction de $n$ puis en déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}$

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = 19\left(\frac{1}{3}\right)^n$

de $v_n = 4u_n - 6n + 15$ il vient $4u_n = v_n + 6n - 15$ donc $u_n = \frac{1}{4}v_n + \frac{6n-15}{4}$

$u_n = \frac{19}{4}\,\frac{1^n}{4^n}+\frac{6n-15}{4} = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}$

**Conclusion :**

$\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = 19\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ **et** $\boldsymbol{u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}}$

**4-** Montrer que la suite $u$ peut s'écrire sous la forme $u = t + w$ où $t$ est une suite géométrique et $w$ une suite arithmétique à déterminer.

On pose $\forall\ n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $w_n = \frac{6n-15}{4} = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$

On a $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = t_n + w_n$

- Montrons que $(t_n)$ est géométrique

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}t_n$

donc $(t_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{19}{4}$

- Montrons que $(w_n)$ est arithmétique

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{3}{2}(n+1) - \frac{15}{4} - \left(\frac{3}{2}n - \frac{15}{4}\right) = \frac{3}{2}$

donc $(w_n)$ est une arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = \frac{3}{2}\times 0 - \frac{15}{4} = -\frac{15}{4}$

**Conclusion :** $\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = t_n + w_n}$ **avec** $\boldsymbol{t_n = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ **et** $\boldsymbol{w_n = \frac{6n-15}{4} = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}}$

**5-** Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

$$= \frac{19}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}} \text{ car } \frac{1}{3} \neq 1$$

$$= \frac{19}{4}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{57}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$
$$= \frac{(n+1)(w_n + w_0)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)\left(\frac{3}{2}n - \frac{15}{4} - \frac{15}{4}\right)}{2}$$
$$= (n+1)\frac{3n-15}{4} \text{ car } \frac{-15}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{15}{2} \text{ et } \frac{\frac{-15}{2}}{2} = -\frac{15}{4}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(t_k + w_k) = \sum_{k=0}^{n} t_k + \sum_{k=0}^{n} w_k = T_n + W_n = \frac{57}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-15)}{4}$$

**<u>Conclusion</u> :**

$$\boldsymbol{T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \frac{57}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right), \; W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \frac{(n+1)(3n-15)}{4} \; \text{ et } \; S_n = \frac{57}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-15)}{4}}$$

**6-** <u>Compléter le script Python qui de mande $n$ à l'utilisateur et qui affiche $S_n$</u>

```
n=int(input('n='))
u=1 #u0
S=u
for p in range (1,n+1):
    u=1/3*u+p-2
    S=S+u
print('S',S)
```

**7-** <u>La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?</u>

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{57}{8} \text{ car } \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \; \left(-1 < \frac{1}{3} < 1\right)$$
$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \frac{3}{4}n^2 = +\infty$$
donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

**<u>Conclusion</u> : $(S_n)$ n'est pas convergente donc divergente.**

# EXERCICE 2.

Soit $g$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 8\ln(x) - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

Le but de cet exercice est de déterminer le signe de $f(x)$

**1-** <u>Déterminer l'ensemble de définition.</u>

$f$ existe $\Leftrightarrow x > 0$

***Df*** $= \mathbb{R}_+^*$

**2-** <u>On admet que</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. <u>Que peut-on en déduire graphiquement ?</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ étude des branches infinies

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

**3-** <u>Dresser le tableau de variation de $f$.</u>

$f$ est dérivable sur $Df$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in Df$ , $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2-8}{x} = \dfrac{2(x^2-4)}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$

$\forall x \in Df$ , $x > 0$ et $x+2 > 0$ donc $\dfrac{2(x+2)}{x} > 0$ et par suite $f'(x)$ est du signe de $x-2$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | $2$ | $\beta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $0$ | $f(2)$ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

$f(2) = 2^2 - 8\ln(2) - 1 = 3 - 8\ln(2)$ or $\ln(2) \approx 0,7$ d'où $f(2) \approx -2,6 < 0$.

**4-** <u>Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$ sur $Df$</u>

- <u>**Etude sur ]0, 2]**</u>

$f$ est continue sur ]0, 2] car dérivable
$f$ est strictement décroissante sur ]0, 2] d'après le tableau de variation.
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 3 - 8\ln(2)$ or $\ln(2) \approx 0,7$ d'où $f(2) \approx -2,6 < 0$
Donc $f$ réalise une bijection de ]0, 2] sur $f(]0, 2]) = [f(2), +\infty[$

De plus $0 \in [f(2), +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0, 2]$ .

- **Etude sur $[2, +\infty[$**

$f$ est continue sur $[2,+\infty[$ car dérivable
$f$ est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ d'après le tableau de variation.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 3-8\ln(2) < 0$
Donc $f$ réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $f([2,+\infty[) = [f(2),+\infty[$
De plus $0 \in [f(2),+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [2, +\infty[$

**Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha<\beta$ sur $Df$**

**5-** Calculer $f(1)$. Que pouvez-vous en déduire ?

$f(1) = 1^2-8\ln(1)-1 = 1-0-1 = 0$
On sait d'après la question 4 que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0, 2]$ et $1 \in ]0, 2]$ donc $\alpha = 1$.

**Conclusion : $f(1)=0$ et $\alpha=1$**

**6-** Montrer que $\beta \in [2, 4]$

De plus $f(2) = 3-8\ln(2) < 0$ et $f(4) = 4^2-8\ln(4)-1 = 15-8\ln(2^2) = 15-16\ln(2) \approx 3.8 > 0$
donc $\beta \in [2, 4]$

**Conclusion : $\beta \in [2, 4]$**

**7-** Compléter le programme Python qui détermine $\beta$ à $10^{-2}$ près.

```python
import numpy as np
def f(x):
    return x**2-8*np.log(x)-1

a,b=2,4
while np.abs(b-a)>=10**(-2):
    m=(a+b)/2
    if f(m)*f(b)>0:
        b=m
    else :
        a=m
print(m)
```

**8-** Déterminer le signe de $f(x)$

| $x$ | | $1$ | | $\beta$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ : | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

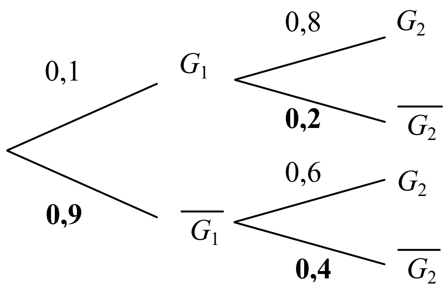
# EXERCICE 3.

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0, 1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul $G_n$ l'évènement "le joueur gagne la $n$-ième partie" et $p_n$ la probabilité de l'évènement $G_n$.
On a donc $p_1 = 0{,}1$.

**1-** <u>Montrer que $p_2 = 0{,}62$.</u>
Établissons un arbre pondéré de la situation




$G_1$ et $\overline{G_1}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1})$$

$$= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2)$$

$$= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + (1 - P(G_1) \times P_{\overline{G_1}}(G_2)$$

$$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}54 = 0{,}62$$

<u>**Conclusion**</u> **: $p_2 = P(G_2) = 0{,}62$**

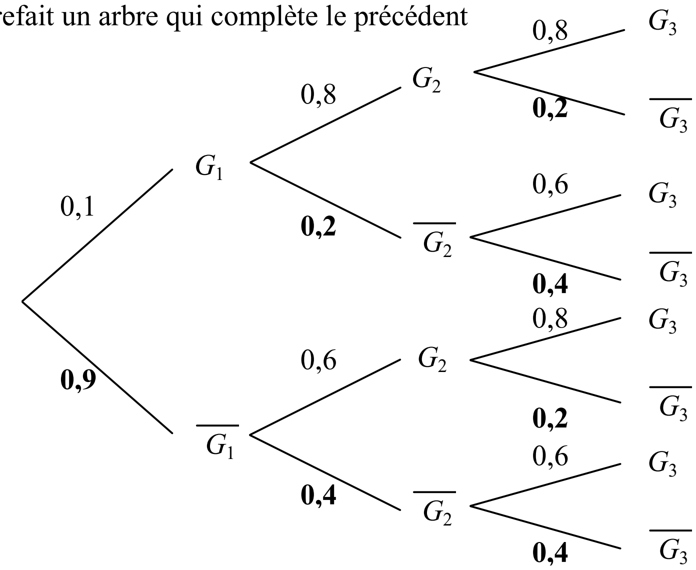
**2-** <u>On suppose (dans cette question uniquement), que le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première</u>.

$P(G_2) = 0{,}62 \neq 0$ donc $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}62} = \dfrac{54}{62} = \dfrac{27}{31}$

<u>**Conclusion**</u> **: la probabilité que le joueur ait perdu la première sachant qu'il a gagné la deuxième partie est $\dfrac{27}{31}$.**

**3-** Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

On refait un arbre qui complète le précédent



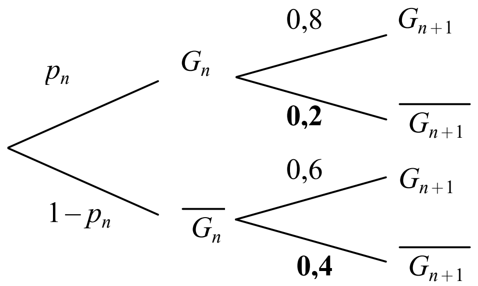

On note $X$ le nombre de parties gagnées

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) \\
&= 1 - P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})P_{\overline{G_1} \cap \overline{G_2}}(\overline{G_3}) \\
&= 1 - 0{,}9 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \\
&= 1 - 0{,}144 \\
&= 0{,}856
\end{aligned}
$$

**Conclusion : la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties. est 0,856**

**4-** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$

On fait à nouveau un arbre




$G_n$ et $\overline{G_n}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = P(G_{n+1})$

$$= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$
$$= P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$$
$$= 0{,}8p_n + 0{,}6(1 - p_n)$$
$$= 0{,}2p_n + 0{,}6$$
$$= \frac{2}{10}p_n + \frac{6}{10}$$
$$= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

**<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$**

**5-** <u>Déterminer l'expression de $p_n$ en fonction de $n$.</u>
$(p_n)$ est une suite arithmético-géométrique.

- <u>Recherche du point fixe</u>

$k = \frac{1}{5}k + \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5\ k - k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} = 0{,}75$

- <u>Suite auxiliaire</u>

On définie la suite $(v_n)$ par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = p_n - \frac{3}{4}$

Montrons que $(v_n)$ est une suite géométrique.

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5}v_n$

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}75 = 0{,}1 - 0{,}75 = -0{,}65$

$\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 \times q^{n-1} = (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$

- <u>Expression de $p_n$</u>

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = v_n + \frac{3}{4} = (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

**<u>Conclusion</u> : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$**

**6-** <u>Compléter les deux programmes `Python` qui demande $n$ à l'utilisateur et qui affiche $p_n$</u>
<u>Méthode 1</u> : en utilisant $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ et $p_1 = 0{,}1$

```
# programme 1
n=int(input('n='))
p=0.1  #p1
for i in range(2,n+1) :
    p=1/5*p+3/5
print('p=',p)
```

Méthode 2 : en utilisant $p_n = (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

```
# programme 2
n=int(input('n='))
p=(-0.65)*(1/5)**(n-1)+3/4
print('p=',p)
```

**7-** Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{p_n = \frac{3}{4}}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \ \left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

**8-** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ par le calcul

On donne $\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 9{,}36$

$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$

$\frac{3}{4} - (-0{,}65)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{4} < 10^{-7}$

$0{,}65\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 10^{-7}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < \frac{10^{-7}}{0{,}65}$

$\ln\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < \ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$(n-1)\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)$

$n - 1 > \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$ car $\ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ en effet $0 < \frac{1}{2} < 1$

$n > \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} + 1$ et $\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0{,}65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} + 1 \approx 10{,}36$

**Conclusion :le plus petit entier naturel $n$ tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ est 11.**

**9-** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ avec `Python`

```
n=1
p=0.1
while 3/4-p>=10**(-7) :
        n=n+1
        p=(-0.65)*(1/5)**(n-1)+3/4
print('n=',n)
```

Remarque: La ligne 5 peut-être remplacer par `p=1/5*p+3/5`

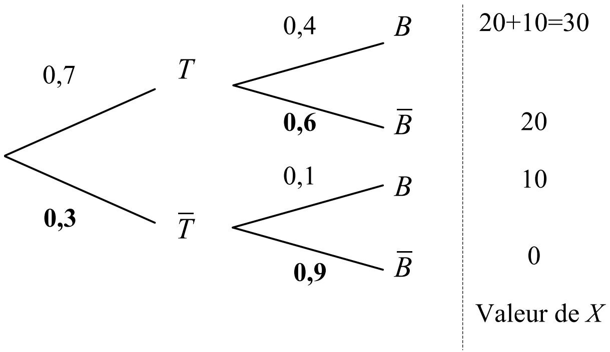
# EXERCICE 4.

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note :
$T$ l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif »
$B$ l'évènement « le ménage consomme des produits bio »

**1-** Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré si cela est possible




**2-** Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

$p(T\cap B) = p(T)p_T(B) = 0{,}7\times 0{,}4 = 0{,}28$

**Conclusion : la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio » est 0,28.**

**3-** Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

$T$ et $\overline{T}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(T\cap B)+p(B\cap\overline{T}) \\ &= p(T\cap B)+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}\,(B) \\ &= p(T\cap B)+(1-p(T))\times\, p_{\overline{T}}\,(B) \\ &= 0{,}28+0{,}3\times 0{,}1 = 0{,}28+0{,}03 = 0{,}31 \end{aligned}$$

**Conclusion : la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31**

**4-** Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio

$p(B) = 0{,}31 \neq 0$

$$p_B(T) = \frac{p(B\cap T)}{p(B)} = \frac{0{,}28}{0{,}31} = \frac{28}{31}$$

**Conclusion : la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio est $\frac{28}{31}$.**

**5-** Les évènements $T$ et $B$ sont-ils indépendants ? Justifier.
$p(T)\times p(B) = 0{,}70{,}31 = 0{,}217$ et $p(T\cap B) = 0{,}28$
donc $p(T\cap B) \neq p(T)P(B)$

**Conclusion : les évènements *T* et *B* ne sont pas indépendants**

**6-** Calculer la probabilité de l'évènement $T\cup B$ puis interpréter ce résultat.
$p(T\cup B) = p(T)+p(B)-p(T\cap B) = 0{,}7+0{,}31-0{,}28 = 0{,}73$

**Conclusion : la probabilité de l'évènement $T\cup B$ est 0,73 ce qui signifie que 73% des ménages pratiquent le tri sélectif ou consomment des produits bio.**

**7-** Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).Soit $X$ la somme d'argent reçue par un ménage.

**a)** Donner la loi de probabilité de $X$.

$X(\Omega) = \{0, 10, 20, 30\}$

$p(X=0) = p(\overline{B}\cap\overline{T}) = p(\overline{T})p_{\overline{T}}(\overline{B}) = p(\overline{T})(1-p_{\overline{T}}(B)) = 0{,}3\times 0{,}9 = 0{,}27.$

$p(X=10) = p(B\cap\overline{T}) = 0{,}03$

$p(X=20) = p(\overline{B}\cap T) = p(T)p_T(\overline{B}) = p(T)(1-p_T(B)) = 0{,}7\times 0{,}6 = 0{,}42.$

$p(X=30) = p(T\cap B) = 0{,}28$

| $x_i$ | 0 | 10 | 20 | 30 | total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,27 | 0,03 | 0,42 | 0,28 | 1 |
| $x_i\, p_i$ | 0 | 0,3 | 8,4 | 8,4 | 17,1 |

**b)** Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

$E(X) = \sum x_i p_i = 17{,}1$ € ce qui signifie que la ville donnera en moyenne 17,1 € par ménage .

**c)** Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = p(X \leq x)$

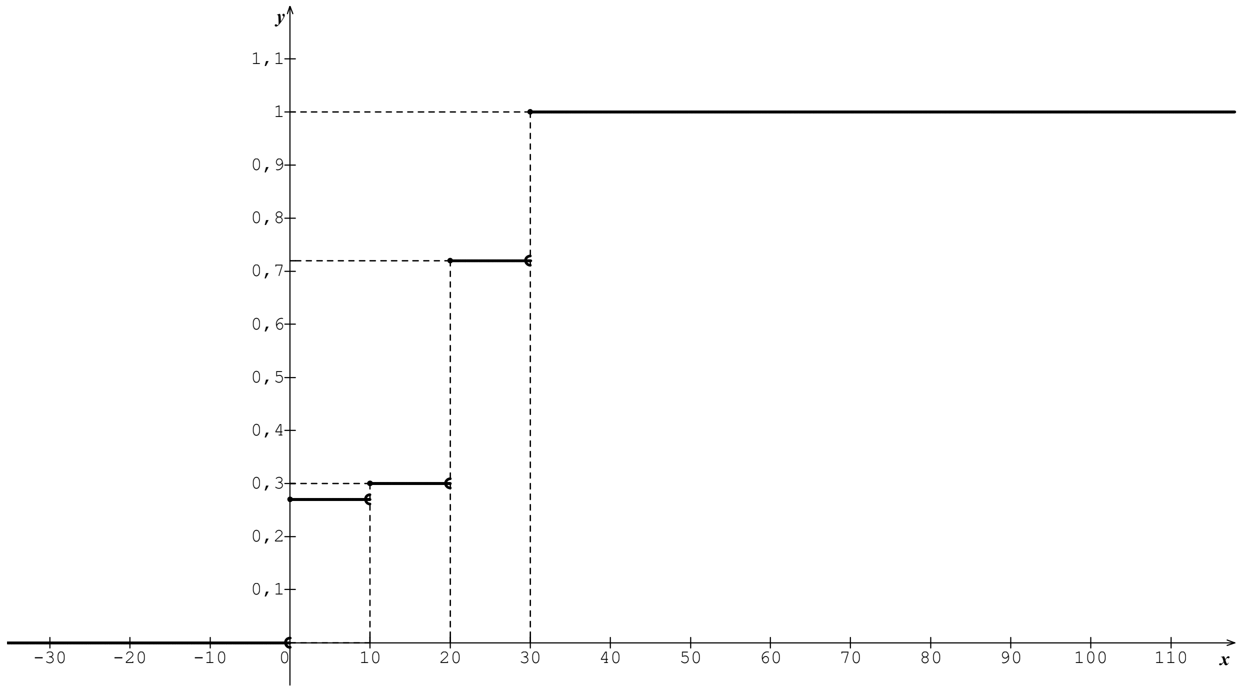
si $x < 0$ alors $F(x) = 0$

si $0 \leq x < 10$ alors $F(x) = P(X=0) = 0{,}27$

si $10 \leq x < 20$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10) = 0{,}27+0{,}03 = 0{,}3$

si $20 \leq x < 30$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10)+P(X=20) = 0{,}27+0{,}3+0{,}42 = 0{,}72$

si $30 \leq x$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30) = 0{,}27+0{,}3+0{,}42+0{,}28 = 1$



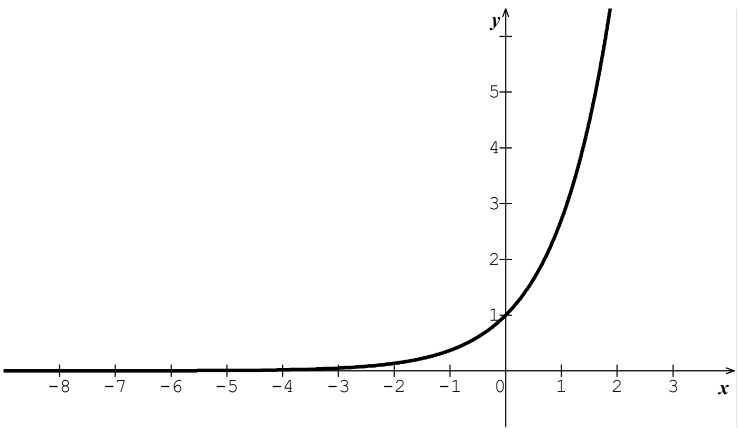

# EXERCICE 5.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+e^x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative

**1-** <u>Déterminer l'ensemble de définition de $f$ noté $Df$.</u>

$f$ existe $\Leftrightarrow 1+e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -1$ toujours vraie acr une exponentielle est toujours strictement positive
$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}}$.

**2-** <u>Tracer la courbe représentative de l'exponentielle et rappeler</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$




$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

**3- a)** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x) = 1 \end{cases}$$

**Conclusion :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$

**La droite $D'$ d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$**
**L'étude de la position relative sera faite à la question 4a**

**b)** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x) = +\infty \end{cases}$$

**Conclusion :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

**La droite $D$ d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$**
**L'étude de la position relative sera faite à la question 4b**

**4-** On définit les droites $D$ d'équation $y=0$ et $D'$ d'équation $y=4$.

**a)** Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $D'$

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $D'$ revient à étudier le signe de $f(x)-y_{D'}=f(x)-4$

$$f(x)-4 = \frac{4}{1+e^x} - 4 = \frac{4-4-4e^x}{1+e^x} = \frac{-4e^x}{1+e^x}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-4e^x<0$ et $1+e^x>0$ d'où $f(x)-4<0$ et par suite la courbe $\mathscr{C}$ sera en dessous de la droite $D'$

**Conclusion : la courbe représentative de $f$ sera en dessous de la droite d'équation $y=4$**

**b)** Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $D$

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $D'$ revient à étudier le signe de $f(x)-y_D=f(x)-0$

$$f(x)-y_D=f(x)-0=f(x)=\frac{4}{1+e^x}$$

$\forall x \in\mathbb{R}$, $4>0$ et $1+e^x>0$ donc $f(x)-y_D>0$ et par suite $\mathscr{C}$ est au-dessus de $D$

**Conclusion : la courbe représentative de $f$ sera au-dessus de la droite d'équation $y=0$**

**5- a)** Calculer la dérivée de $f$ et déterminer le signe $f'$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-4e^x<0$ et $(1+e^x)^2>0$ par suite $f'(x)<0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

**Conclusion :** $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$ **et** $f'(x)<0$

**b)** Dresser le tableau de variation de $f$ en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $4$ | $\searrow$ $2$ $\searrow$ | $0$ |

$f(0) = \dfrac{4}{1+e^0} = \dfrac{4}{2} = 2$

**c)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

Une équation cartésienne de la tangente ($T$) à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ est donnée par

$T: \ y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = -\dfrac{4}{2^2} = -1$ et $f(0) = 2$

donc $T: \ y = -1(x-0)+2$ i. e $y = -x+2$

**Conclusion : l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x=0$ est $y=-x+2$**

**6- a)** Montrer que la dérivée seconde de $f$ est donnée par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$

$f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{-4e^x(1+e^x)^2-(-4e^x)2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{4e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

**Conclusion** : $\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}}$

**b)** En déduire que $f$ possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel $f$ est convexe et un intervalle sur lequel $f$ est concave.

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $4e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $e^x - 1$

Pour étudier le signe de $e^x - 1$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $e^x - 1 \geq 0$

$e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$x \geq 0$ car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où le signe de $e^x - 1$:

| | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Conclusion :**

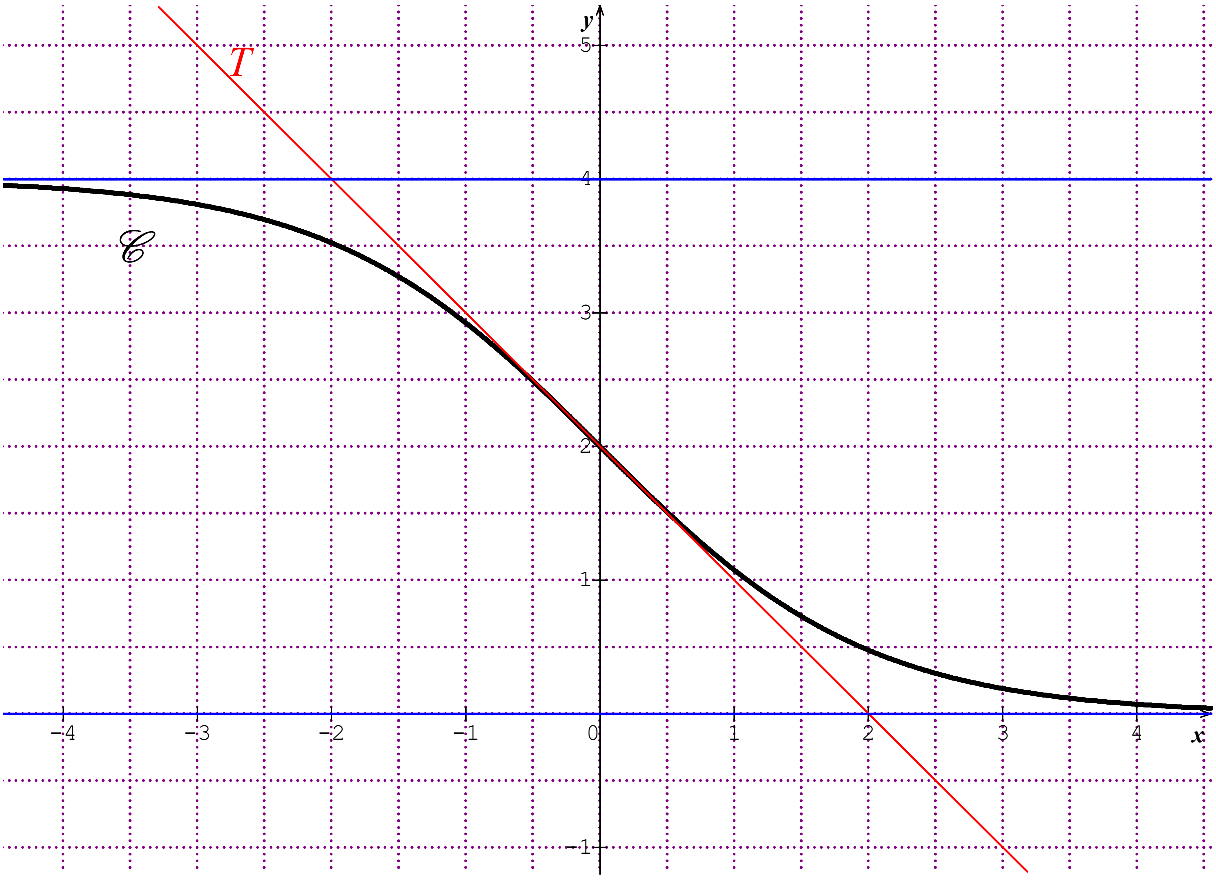
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| **convexité** | $f$ **est concave** | **point d'inflexion (0, $f$(0))** | $f$ **est convexe** |

**$f''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe donc $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion de coordonnées (0, 2) car $f(0)=2$**

**c)** <u>Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de $f$ avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.</u>

si $x < 0$, $f$ est concave donc $\mathscr{C}$ est en dessous de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
si $x > 0$, $f$ est convexe donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

**7-** <u>Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$, les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.</u>



# EXERCICE 6.

On a programmé une fonction en `Python`

```
import numpy as np
def f(coucou):
    velo=coucou**3*(np.log(coucou)-5/6)
    return velo
```

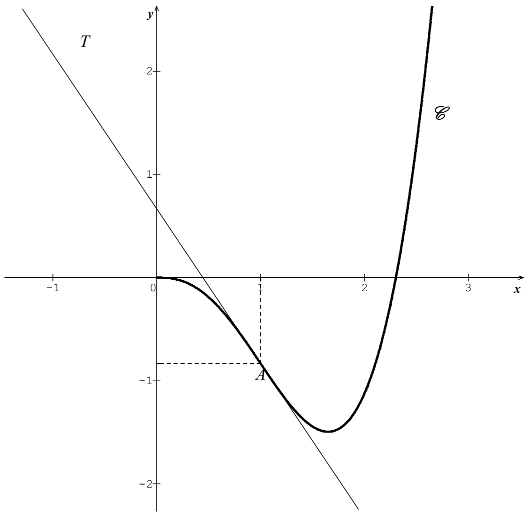
**1-** Quelle est l'expression de cette fonction noté $f$

**$f$ est définie par $f(x)=x^3\left(\ln(x)-\frac{5}{6}\right)$**

**2-** Déterminer l'ensemble de définition de $f$ noté $Df$

$f$ existe $\Leftrightarrow x>0$ $\boldsymbol{Df=\mathbb{R}_+^*}$

**3-** Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé et la droite $T$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A$ d'abscisse 1 par le logiciel




- Par lecture graphique donner la limite de $f$ en $+\infty$

par lecture graphique on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- Que représente $A$ pour la courbe ?

La courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en $A$, **donc $A$ est un point d'inflexion**.

**4-** Montrer que $\forall x \in Df,\ f'(x) = 3x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)$

$f$ est dérivable sur $Df$ comme produit de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df,\ f'(x) = 3x^2\left(\ln(x)-\frac{5}{6}\right)+x^3\times\frac{1}{x}$$

$$= 3x^2\left(\ln(x)-\frac{5}{6}\right)+x^2$$

$$= x^2\left(3\ln(x)-\frac{5}{2}+1\right)$$

$$= x^2\left(3\ln(x)-\frac{3}{2}\right) = 3x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)$$

**Conclusion :** $\boldsymbol{\forall x \in Df, f'(x)=3x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)}$

**5-** <u>Étudier le sens de variation de $f$</u>

$\forall\, x \in Df, f'(x) = 3x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$

$\forall\, x \in Df,\ 3x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$

Pour étudier le signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $\ln(x) - \frac{1}{2} \geq 0$

$\ln(x) - \frac{1}{2} \geq 0$

$\ln(x) \geq \frac{1}{2}$

$x \geq e^{\frac{1}{2}}$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$x \geq \sqrt{e}$ rappel: $\sqrt{e} = e^{1/2}$

signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$ :

| $x$ | $0$ | | $e^{1/2}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\to$ |

**<u>Conclusion :</u> $f$ est croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ et $f$ est décroissante sur $]0, \sqrt{e}]$**

**6-** <u>Dresser le tableau de variation de $f$</u>

| $x$ | $0$ | | $e^{1/2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $f(e^{1/2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(\sqrt{e}) = (e^{\frac{1}{2}})^3\left(\ln(e^{\frac{1}{2}}) - \frac{5}{6}\right) = e^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}$

**7-** <u>Étudier la convexité de $f$ et retrouver le point $A$.</u>

$\forall\, x \in Df, f'(x) = 3x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$

$f$ est dérivable sur $Df$ comme produit de fonctions dérivables

$\forall\, x \in Df,\ f''(x) = 6x\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + 3x^2\frac{1}{x} = 3x(2\ln(x) - 1 + 1) = 6x\ln(x)$

$\forall\, x \in Df,\ 6x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\ln(x)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| convexité | $\|\|$ | $f$ est concave | $A$ point d'inflexion $(1, f(1))$ | $f$ est convexe | |

$f(1) = 1\left(\ln(1) - \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6}$ car $\ln(1) = 0$