CHAPITRE 14 : DÉNOMBREMENT

I- INTRODUCTION

1. INSUFFISANCE DES ARBRES

Depuis le début d'année pour compter le nombre de cas dans différentes situations de probabilité , on utilise des arbres.
Cette méthode est insuffisante pour deux raisons :

- Si le nombre de cas est élevé, il ne serait pas raisonnable de construire un arbre : en effet, comment écrire un arbre traduisant l'arrivée du quintet avec 25 chevaux au départ ! ! ! ! !
- Un arbre ne peut être construit que si le tirage est avec ordre alors comment faire quand il n'y a pas d'ordre...

2. NOTION DE FACTORIELLE

Soit n un entier naturel non nul.
On définit la factorielle n, notée $n!$, par le produit de tous les entiers de 1 à n.

Exemples
$3! =$

$5! =$

par convention $0! =$

3. TYPE DE TIRAGE

Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel avec $p \leq n$

Il y 3 façons de tirer p objets parmi n :

- simultanément : sans ordre ni remise appelée **combinaison**
- successivement sans remise : avec ordre et pas de remise appelé **arrangement**
- successivement avec remise : avec ordre et remise appelée **p–liste**

II- TIRAGE SUCCESSIF AVEC REMISE

1. NOMBRE DE p-LISTE

Lorsqu'on tire p objet parmi n **avec ordre et avec remise** alors il y a n^p possibilités de le faire.

2. EXEMPLES CONCRETS

a) Le code d'un coffre fort est composé de 4 chiffres de 0 à 9.
Déterminer le nombre de codes possibles ?

b) Au loto foot, on coche l'une des trois cases $\boxed{1}$, $\boxed{N}$,$\boxed{2}$ pour chacun des 14 matches sélectionnés. Dénombrer le nombre de grilles distinctes. Quelle est la probabilité de faire les 14 bons pronostics ?

c) Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 :

d) On considère une urne comprenant 10 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 5 boules noires et 2 boules blanches .On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule.
combien y a-t-il de possibilités de tirage ?

combien y a-t-il de tirages comportant deux boules rouges ?

combien y a-t-il de tirages unicolores ?

combien y a-t-il de tirages comportant 1 boule rouge et 1 boule blanche ?

combien y a-t-il de tirages bicolores ?

e) Les nouvelles plaques minéralogiques sont composées de 2 lettres , 3 chiffres et 2 lettres. Combien de plaques minéralogiques peut-on émettre

Remarque :
si on peut distinguer les objets et que le tirage est successif (avec ordre), il ne faut pas oublier de déterminer la place des objets.

III- TIRAGE SUCCESSIF SANS REMISE

1. ARRANGEMENT

Lorsqu'on tire p objet parmi n **avec ordre et sans remise** alors il y a :
$n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ possibilités de le faire.

2. EXEMPLES CONCRETS

a) Il y a 20 chevaux au départ du tiercé. Dénombrer le nombre de tiercés possibles, de quintés ?

b) On considère une urne comprenant 10 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 5 boules noires et 2 boules blanches. On tire successivement deux boules de cette urne.
combien y a-t-il de possibilités de tirage ?

combien y a-t-il de tirages comportant deux boules rouges ?

combien y a-t-il de tirages unicolores ?

combien y a-t-il de tirages comportant 1 boule rouge et 1 boule blanche ?

combien y a-t-il de tirages bicolores ?

3. CAS PARTICULIER OÙ $\boldsymbol{p=n}$

a) Principe

on a : $n(n-1)(n-2)\dots\, 2\times1 = \boldsymbol{n!}$ possibilités de le faire

dans ce cas, cela revient à placer les n objets comme dans les anagrammes par exemples.
On parle alors de **permutation.**

b) Exemples concrets : anagramme

On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois). Par exemple : REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS. On considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

i) Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?

ii) Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?

iii) Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

iv) Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

IV- TIRAGE SIMULTANE

1. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $A = \{1\ ; 2\ ; 3\ ; 4\ ; 5\}$ donc card $A =$.
Cherchons les sous-ensembles de A ayant p éléments avec $0 \leq p \leq 5$

- Si $p = 0$, il y a 1 seul sous-ensemble ayant 0 élément : c'est l'ensemble vide : $\varnothing \subset A$
- Si $p = 1$, il y a 5 sous-ensembles ayant 1 élément : $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$
- Si $p = 2$, il y a 10 sous-ensembles ayant 2 éléments :
  $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$
- Si $p = 3$, il y a 10 sous-ensembles ayant 3 éléments :
  $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}$
- Si $p = 4$, il y a 5 sous-ensembles ayant 4 éléments :
  $\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}$
- Si $p = 5$, il y a 1 seul sous-ensemble ayant 5 éléments : : $\{1,2,3,4,5\}$

Cela revient à faire un tirage sans ordre ni remise, on dit aussi exhaustif.

Heureusement qu'il existe des formules pour calculer ! !

2. THÉORÈME

Soit n un entier naturel et $0 \leq p \leq n$
Soit A un ensemble fini de cardinal n
Une combinaison de p éléments parmi n, notée $\binom{n}{p}$, revient à tirer p éléments parmi n sans ordre ni remise ce qui correspond au nombre de sous-ensembles de E de cardinal p.
On a $\boldsymbol{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Remarque : il existe une autre notation $\binom{n}{p} = C_n^p$.
Ne pas se tromper quant à la place de *n* et *p*.

3. PROPRIÉTÉS DES $\binom{n}{p}$

Soit n un entier naturel supérieur à 1 et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$

$\binom{n}{0} =$

$\binom{n}{1} =$

$\binom{n}{n} =$

$\binom{n}{p} =$ exemple : $\binom{5}{4} =$

$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ (triangle de Pascal)

4. EXEMPLE DE CALCUL $\binom{n}{p}$

calculer $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$, $\binom{5}{5}$

calculer $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$ et $\binom{6}{6}$

calculer $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{7}{6}$ et $\binom{7}{7}$

5. EXEMPLES CONCRETS

a) Une grille de loto consiste à choisir 5 numéros parmi 49 et 1 numéro parmi les 10 numéros " chances ". Calculer le nombre de grilles possibles.

b) Une grille de loto consiste à choisir 5 numéros parmi 50 et 2 numéros parmi les 10 numéros " étoiles ". Calculer le nombre de grilles possibles.

c) Une urne contient 4 boules rouges et 5 boules vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur.

Calculer le nombre de possibilités pour que les deux boules tirées soient de couleur rouge.

Calculer le nombre de possibilités pour que les deux boules tirées soient de couleur différente.

d) Le poker se joue avec un jeu de 32 cartes. On choisit 5 cartes au hasard appelées "mains".
Déterminer le nombre de mains possibles ainsi que le nombre de mains qui contiennent exactement 4 as.

6. TRIANGLE DE PASCAL

Les nombres $\binom{n}{p}$ sont donnés par le triangle de Pascal.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$		$p - 1$	p	…..
$n = 0$	1								
$n = 1$	1	1							
$n = 2$	1	2	1						
$n = 3$	1	3	3	1					
$n = 4$	1	4	6	4	1				
…..									
$n - 1$	1	$n - 1$					$\boldsymbol{\binom{n-1}{p-1}}$	$\boldsymbol{\binom{n-1}{p}}$	
n	1	n						$\boldsymbol{\binom{n}{p}}$	

7. FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Pour tous nombres a et b et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

<u>exemples</u>

$(a+b)^2 =$

$(a-b)^2 =$

$(a+b)^3 =$

$(a-b)^3 =$

$(a+b)^4 \quad =$

$(a-b)^4 \quad =$

$(a+b)^5 \quad =$

$(a-b)^5 \quad =$

V– EN GUISE DE CONCLUSION

Les questions qu'il faut se poser :

a- Quel est le nombre n d'objets de référence
b- Quel est le nombre p d'objets concernés par une situation
c- déterminer le type de tirage

	avec ordre	sans ordre
avec remise	n^p	? ? ?
sans remise	$n(n-1)..(n-p+1)$	$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\times p!}$

Dans le cas où il y a un ordre et que l'on peut distinguer les objets , ne pas oublier le choix de la place des objets.

<u>Remarque :</u> Quand une situation comporte plusieurs choix à effectuer :

- On effectue un **produit** quand on doit faire un choix, puis un autre ...
- On effectue une **somme** quand on a à considérer un cas ou bien un autre ...

Enfin le nombre de permutations de n objets est $n!$