

DEVOIR N°19
(A rendre le Lundi 28 avril)

Exercice 1 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , et on note p_n la probabilité de l'évènement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$

1- Calculer les probabilités des évènements suivants :

- a) A : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont positifs » ;
- b) B : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont négatifs ».

2- Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^{ème} sondage soit positif.

3- Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$

4- Exprimer p_n en fonction de n .

5- Compléter les deux programmes Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n

```
# Programme 1
n=int(input('n='))
p=.....
for j .....
    .....
print(p)
```

```
# Programme 2
n=int(input('n='))
.....
print(p)
```

6- Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x - 2 + e^{-x}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une droite asymptote D d'équation $y = x - 2$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3- Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

- 4- Compléter le programme Python afin de déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près

```
import numpy as np
def f(x):
    .....
    .....

a=.....
b=.....
while .....
    m=.....
    if .....
    .....
    .....
    .....
print(a)
```

Attention les indentations ne sont pas forcément respectées

- 5- Tracer l'allure de $\mathcal{E}$ et D . On donne $\alpha \approx 1,84$ et $\beta \approx -1,14$.