

CORRECTION DU DEVOIR N°18

Exercice 1 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point a après avoir déterminé l'ensemble de définition des fonctions

1- $f(x) = 3x^7$ $a = -1$

$Df = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3(-1)^7 = -3$

2- $f(x) = e^{x^2-x-1}$ $a = 1$

$Df = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{1^2-1-1} = e^{-1}$

3- $f(x) = e^{x^2-x-1}$ $a = +\infty$

$Df = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \end{cases}$

Étude des branches infinies

4- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $a = 0$

$Df = \mathbb{R}^*$

signe de x^2 : $\xrightarrow{+} \oplus \xrightarrow{+}$
0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^+ \end{cases}$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à \mathcal{C}

5- $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2+3x+2}$ $a = -\infty$

f existe $\Leftrightarrow x^2+3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq -2$

$Df = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+3x+2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à \mathcal{C} en $-\infty$

11- $f(x) = \frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)}$ $a = +\infty$ (vous ne déterminerez pas Df)

En remplaçant x par $+\infty$ on trouve une forme indéterminée aussi il faut factoriser $f(x)$ par le terme prépondérant ici e^x au numérateur et x^2 au dénominateur.

$$f(x) = \frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)} = \frac{e^x \left(1 + 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 + 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ croissances comparées}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}} = 1 \end{cases}$$

Étude des branches infinies

Exercice 2 :

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et une boule noire, l'urne U_2 contient trois boules blanches et deux boules noires. On effectue des tirages avec remise.

On tire une première boule dans l'urne U_1 .

Si cette première boule est blanche, on tire une seconde boule dans l'urne U_1 . Sinon, on tire une seconde boule dans l'urne U_2 .

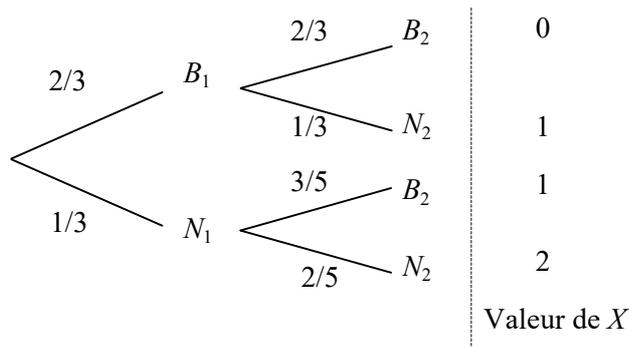
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées.

L'évènement le second tirage a lieu dans l'urne U_1 est appelée U .

On appelle B_k l'évènement "la boule blanche est obtenue au k -ième tirage" et N_k l'évènement "la boule noire est obtenue au k -ième tirage"

1- Déterminer $P(U)$.

Établisons un arbre pondéré traduisant la situation :



L'événement U est réalisé lorsque l'on a tiré une boule blanche lors du premier tirage, donc

$$P(U) = P(B_1) = \frac{2}{3}.$$

Conclusion : $P(U) = P(B_1) = \frac{2}{3}$

2- Donner $X(\Omega)$.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\} = \llbracket 0, 2 \rrbracket$$

3- Donner la loi de X .

$$P(X=0) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) \quad \text{car } (B_1 \cap N_2) \text{ et } (N_1 \cap B_2) \text{ sont disjoints} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{10+9}{45} = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

$$P(X=2) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{45}$$

d'où la loi de X :

x_i	0	1	2	total
p_i	$\frac{20}{45}$	$\frac{19}{45}$	$\frac{6}{45}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{19}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{31}{45}$

4- Calculer l'espérance de X .

$$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{31}{45}$$

5- Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$$

$$\text{si } x < 0, F(x) = 0$$

$$\text{si } 0 \leq x < 1, F(x) = P(X=0) = \frac{20}{45}$$

$$\text{si } 1 \leq x < 2, F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{20}{45} + \frac{19}{45} = \frac{39}{45}$$

$$\text{si } 2 \leq x, F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

