

CORRECTION DU DEVOIR N°19

Exercice 1 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'évènement V_n

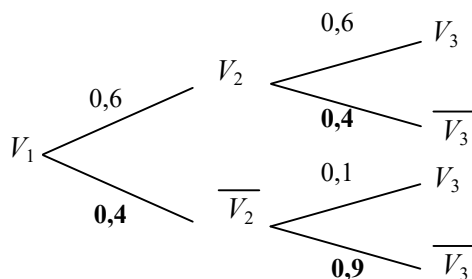
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$

1- Calculer les probabilités des évènements suivants :

a) A : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont positifs » ;



$$P(A) = P(V_2 \cap V_3) = P(V_2)P_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

Conclusion : La probabilité que les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont positifs est 0,36.

b) B : « les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont négatifs ».

$$P(B) = P(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = P(\overline{V_2})P_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$$

Conclusion : La probabilité que les 2^{ème} et 3^{ème} sondages sont négatifs est 0,36.

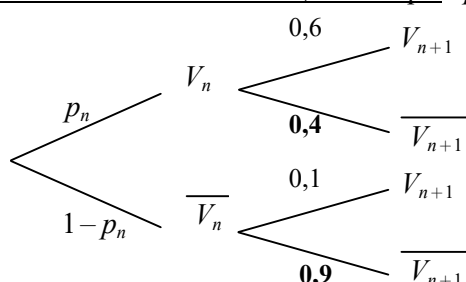
2- Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^{ème} sondage soit positif.

V_2 et $\overline{V_2}$ forment un système complet d'évènement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
 P(V_3) &= P(V_3 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V_2}) \\
 &= P(V_2)P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2})P_{\overline{V_2}}(V_3) \\
 &= 0,36 + 0,4 \times 0,1 = 0,36 + 0,04 = 0,4
 \end{aligned}$$

Conclusion : $p_3 = 0,4$.

3- Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$



V_n et $\overline{V_n}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} &= P(V_{n+1}) = P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) \\ &= P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V_n})P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1-p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$

4- Exprimer p_n en fonction de n .

(p_n) est une suite arithmético-géométrique

- Recherche du point fixe

$$x = 0,5x + 0,1 \Leftrightarrow x - 0,5x = 0,1 \Leftrightarrow x = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$$

- Suite auxiliaire

On définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = p_n - 0,2$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,8(0,5)^{n-1}$$

- Expression de p_n

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = v_n + 0,2 = 0,8(0,5)^{n-1} + 0,2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = v_n + 0,2 = 0,8(0,5)^{n-1} + 0,2$

5- Compléter les deux programmes scilab qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n

```
# Programme 1
n=int(input('n='))
p=1 # p1
for j in range (2,n+1):
    p=0.5*p+0.1
print(p)
```

```
# Programme 2
n=int(input('n='))
p=0.8*(0.5)**(n-1)+0.2
print(p)
```

6- Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^{n-1} = 0 \quad (-1 < 0,5 < 1)$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x - 2 + e^{-x}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une droite asymptote D d'équation $y = x - 2$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$$

donc étude des branches infinies

Soit D la droite d'équation $y = x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - 2 + e^{-x}) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Conclusion : la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = e^{-x}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de D .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

Pour enlever la forme indéterminée en $-\infty$, je factorise par le terme prépondérant : e^{-x}

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = 1 \end{cases} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x + 1) = 1 \end{cases}$$

donc étude des branches infinies

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{xe^x} (xe^x - 2e^x + 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ (croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

2- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Pour étudier le signe de $1 - e^{-x}$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $1 - e^{-x} \geq 0$

$$1 - e^{-x} \geq 0$$

$$e^{-x} \leq 1$$

$$-x \leq 0 \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$x \geq 0$$

d'où le tableau de variations de f

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1.$$

3- Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2,7$. Prouver que $\alpha \in]1,2[$.

La question revient à montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on va appliquer le théorème de la bijection deux fois.

□ **Étude sur $] -\infty ; 0]$**

f est continue sur $\mathbb{R}^-$ car dérivable

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ (voir tableau de variations)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(0) = -1$$

donc f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(\mathbb{R}^-) = [-1 ; +\infty[$

De plus $0 \in [-1 ; +\infty[$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\beta \in \mathbb{R}^-$

□ **Étude sur $[0 ; +\infty[$**

f est continue sur $\mathbb{R}^+$ car dérivable

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (voir tableau de variations)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(0) = -1$$

donc f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [-1 ; +\infty[$

De plus $0 \in [-1 ; +\infty[$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

De plus $f(1) = -1$ et $f(2) = 2 - 2 + e^{-2} = e^{-2}$

D'où $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ donc $\alpha \in]1 ; 2[$

Conclusion : $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β , le premier étant positif, le deuxième étant négatif. De plus $\alpha \in]1,2[$.

4- Compléter le programme Python afin de déterminer un encadrement de α à 10^{-2}

```
import numpy as np
def f(x):
    y = x-2 + np.exp(-x)
    return y

a=1
b=2
while np.abs(b-a) >= 10**(-2):
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m)<0 :
        b=m
    else :
        a=m
print(a)
```

- 5- Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et D . On donne $\alpha \approx 1,84$ et $\beta \approx -1,14$.

