LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**
EC 1

FEUILLE D'EXERCICES N°18:
LIMITES ACTE II

RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien
② Axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x
③ Rappeler les formules de $E(X)$ $V(X)$ et de la fonction de répartition
④ Rappeler le formulaire des dérivées. Rappeler l'équation de la tangente
⑤ Comment étudier les variations d'une fonction
⑥ Rappeler le théorème de la bijection et comment étudier la convexité.
⑦ Position d'une courbe et d'une droite. position d'une courbe et d'une tangente
⑧ Comment étudier le sens de variation d'une suite, rappeler le formulaire des suites arithmétiques ,géométriques .Rappeler la méthode d'étude des suite arithmético-géométrique
⑨ Rappeler les limites de e^x, $\ln(x)$ et les croissances comparées

PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$

1- Écrire un script `Python` qui demande la valeur de n et qui renvoie la valeur de u_n et de v_n

2- On considère la suite p définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}, p_n = u_n + v_n$

a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

3- A l'aide de la question précédente, montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n + 3^n$

4- Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$,définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, est arithmétique.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n

5- Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice B:

On considère une variable aléatoire X tel que $X(\Omega) = \{-1\ ,\ 0,\ 1\}$.

On donne $P(X=-1) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X=1) = \dfrac{1}{4}$

1- Calculer $P(X=0)$

2- Déterminer $E(X)$, $V(X)$, $F(x)$

3- On note $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x+3+\dfrac{\ln(x)}{x}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df

3- Montrer que la droite D d'équation $y = 2x+3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position relative.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + e^x$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df

3- Montrer que la courbe admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on donnera une équation. Étudier la position relative.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df

3- Montrer que la courbe admet une asymptote oblique dont on donnera une équation. Étudier la position relative.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1-\dfrac{x}{e^x}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Montrer que la droite D d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position relative.

3- Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Étudier les branches infinies

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{1+x}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Déterminer les réels a,b,c tel que $\forall\, x \in Df$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{1+x}$

3- Déterminer les limites de f aux bornes de Df

4- Montrer que la courbe $\mathscr{C}$, représentative de f, admet une asymptote oblique dont on donnera une équation. Étudier la position relative.

Exercice 6 :

Déterminer l'ensemble de définition, les limites et l'étude des branches infinies des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \ln(3x)$

b) $f(x) = \ln(2-5x)$

c) $f(x) = x^2\ln(x)$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = e^{2x}-2e^x$

f) $f(x) = (x+3)e^{-x}$

g) $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x-1}$

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1- Compléter le programme suivant pour définir en `Python` la fonction f.:

```
def f( ) :
     .....................
     .....................
```

1- **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathscr{C}$?

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- Calculer $f\,'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau des variations de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. .

3- Établir que f est concave sur $]0, +\infty[$.

4- **a)** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Justifier sans calcul que T est située au dessus de $\mathscr{C}$ sur $]0, +\infty[$

5- **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, +\infty[$ avec $\alpha < \beta$

b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.

c) Écrire un script `Python` permettant d'encadrer β dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}

6- Compléter le programme `Python` de la question 1 afin de tracer $\mathscr{C}$ sur $]0, 10]$

7- Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ et de T. *On donne* $\alpha \approx 0{,}06$ et $\beta \approx 1{,}79$