CHAPITRE 15 : LOI BINOMIALE

I- VARIABLE DE BERNOULLI

1- ÉPREUVE DE BERNOULLI

C'est une épreuve aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec). On note traditionnellement p la probabilité de succès et q ($q = 1 - p$) la probabilité d'échec.
Une telle expérience est dite expérience de Bernoulli de paramètre p

Exemples :

- On lance une pièce non truquée : il y a 2 issues possibles pile ou face. Le joueur gagne si le côté face apparaît par exemple. Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre ………

- On lance un dé non pipé. Le joueur gagne si le résultat est 5 ou 6
  Nous sommes bien en présence d'une épreuve de Bernoulli où le succès est ………………………(de probabilité ………) et l'échec …………………………(de probabilité ………). Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre ………

- Une urne contient 5 oursins et 3 balles en mousse. Le tirage d'un objet dans cette urne a deux issues contraires :
  - P : " je me pique " avec la probabilité ………
  - $\overline{\text{P}}$: " je ne me pique pas " avec la probabilité ………

  Nous sommes bien en présence d'une épreuve de Bernoulli où le succès est, par exemple, P (de probabilité ………) et l'échec $\overline{\text{P}}$ (de probabilité ………). Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre ………

2- VARIABLE DE BERNOULLI

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p
La variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est dite "variable de Bernoulli de paramètre p " ou "variable indicatrice"

Exemples :

- On lance une pièce non truquée : il y a 2 issues possibles pile ou face. Le joueur gagne si le côté face apparaît par exemple. Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre 1/2
  ……….
  ……….
  ……….

- On lance un dé non pipé. Le joueur gagne si le résultat est 5 ou 6
  Nous sommes bien en présence d'une épreuve de Bernoulli où le succès est 5 ou 6 (de probabilité 1/3) et l'échec 1 ou 2 ou 3 ou 4(de probabilité 2/3). Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre 1/3
  …………………………………………………………………………………………………….
  …………………………………………………………………………………………………….
  …………………………………………………………………………………………………….

- Une urne contient 5 oursins et 3 balles en mousse. Le tirage d'un objet dans cette urne a deux issues contraires :
  - P : " je me pique " avec la probabilité 5/8
  - $\overline{P}$: " je ne me pique pas " avec la probabilité 3/8.

  Nous sommes bien en présence d'une épreuve de Bernoulli où le succès est, par exemple, P (de probabilité 5/8) et l'échec $\overline{P}$ (de probabilité 3/8). Donc cette expérience est de Bernoulli de paramètre 5/8
  …………………………………………………………………………………………………….
  …………………………………………………………………………………………………….
  …………………………………………………………………………………………………….

3- <u>Loi de probabilité et espérance mathématique</u>

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p

x_i	0	1	totale
p_i			
$x_i p_i$			
$x_i^2 p_i$			

$E(X) =$

$E(X^2) =$

$V(X) =$

$\sigma(X) =$

Théorème 1 :
Soit X une variable Bernoulli(ou variable indicatrice) de paramètre p alors E (X) = p et V(X) = $p(1-p)=pq$

II– LOI BINOMIALE

1- <u>Schéma de Bernoulli</u>

Une expérience constituée par la répétition de n épreuves de Bernoulli de même paramètre p , et indépendantes les unes des autres, est un schéma de Bernoulli de paramètre $(n\ ;\ p)$

Exemples :

On lance 10 fois une pièce non truquée , pour chaque lancer, un résultat pile correspond à un succès. Cette expérience est constituée par la répétition de 10 épreuves de Bernoulli de paramètre 1/2, indépendantes les unes des autres puisque le résultat d'un lancer est sans conséquence sur les résultats des autres. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètre…………………………………………….

- On lance 5 fois un dé non pipé, pour chaque lancer, un résultat égal à 5 ou 6 correspond à un succès. Cette expérience est constituée par la répétition de 5 épreuves de Bernoulli de paramètre 1/3, indépendantes les unes des autres puisque le résultat d'un lancer est sans conséquence sur les résultats des autres. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètre …………………………………………….

2- Loi Binomiale

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenu au cours des n répétitions d'un schéma de Bernoulli suit une loi appelée loi Binomiale de paramètre n (nombre de répétitions) et p (probabilité de succès) et notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemples :

- On lance 5 fois un dé non pipé, pour chaque lancer, un résultat égal à 5 ou 6 correspond à un succès. Quel est la probabilité d'obtenir 2 succès
  On note X la variable aléatoire qui compte le nombre succès obtenu
  X suit une loi binomiale de paramètre 5 (nombre de répétitions) et $\frac{1}{3}$ (probabilité de succès) et notée $\mathscr{B}\left(5\ ,\frac{1}{3}\right)$.
  On peut s'aider d'un arbre
  Sur 5 lancers il y a 2 succès et donc 3 échecs
  La probabilité de 2 succès et 3 échecs est …………………………car les expériences sont indépendantes
  Reste à placer les 2 succès soit 2 places parmi 5 sans ordre ni remise soit ……………. places donc

  $P(\ X = 2)\ =$ ……………………………………………….

- On lance 10 fois une pièce non truquée , quel est la probabilité d'obtenir 3 fois pile parmi les 10 lancers.

  On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où pile apparaît
  X suit une loi binomiale de paramètre 10 (nombre de répétitions) et $\frac{1}{2}$ (probabilité de succès) et notée $\mathscr{B}\left(10\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.
  On peut s'aider d'un arbre
  Sur 10 lancers il y a 3 succès et donc 7 échecs
  La probabilité de 3 succès et 7 échecs est ………………………… car les expériences sont indépendantes

Reste à placer les 3 succès soit 3 places parmi 10 sans ordre ni remise soit ………………… places donc

$P(X = 3) =$ ……………………………………………….

3- COMMENT REPÉRER UN SCHÉMA DE BERNOULLI

1. Si une expérience aléatoire consiste à répéter plusieurs fois de suite le même tirage ayant 2 issues possibles (une boule, une carte, une personne dans un groupe, ou tout autre choix ...) deux cas peuvent se présenter :
   - il y a n tirages **successifs et avec remise** (chaque tirage a lieu exactement dans les mêmes conditions que le précèdent) **alors il s'agit d'un schéma de Bernoulli.**
     Les deux issues possibles sont le succès (de probabilité p) et l'échec (de probabilité $1 - p$) . La probabilité d'obtenir exactement k ($0 \leq k \leq n$) succès sur les n épreuves est $P(X = k) =$
   - il y a n tirages successifs et sans remise (le tirage suivant n'a pas lieu dans les mêmes conditions que le précédent) , alors l'ensemble des éventualités est généralement un ensemble d'arrangements.

2. Si une expérience aléatoire consiste à effectuer plusieurs tirages simultanément, alors deux cas se présentent :
   - le cas le plus général où l'ensemble des éventualités est un ensemble de combinaisons
   - si l'ensemble dans lequel on effectue le tirage a un cardinal élevé, on peut considérer que le tirage d'un élément modifie très peu la situation et qu'un schéma de Bernoulli rend compte de la situation avec suffisamment de précision. Ce cas particulier vous sera signalé dans les énoncés.

Bilan

On sera en présence d'une loi binomiale si on a les trois conditions suivantes :

1. **On réalise une expérience aléatoire qui comporte 2 issues et deux seulement : l'une est appelée succès de probabilité p et l'autre est l'échec de probabilité $1 - p$**
2. **On réalise n expérience identique à la précédente de façon indépendante**
3. **La variable aléatoire compte le nombre de succès sur les n expériences**

Donc la probabilité d'obtenir exactement k ($0 \leq k \leq n$) succès sur les n épreuves est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

Remarque :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{k}{n} p^k (1 - p)^{n - k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$ d'après la formule du binôme de Newton

4- LES VALEURS TYPIQUES

Théorème 2 :

Soit X une variable aléatoire qui suit $\mathscr{B}(n\ ,p)$ alors
$E(X) = np$
$V(X) = np(1-p) = npq$

5- Exemple type avec rédaction

On lance 10 fois de suite un dé non truqué à 6 faces, et on note X le nombre de fois où on obtient 6 . Déterminer la loi de X puis calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le 6

6- SOMME DE VARIABLES DE BERNOUILLI

Théorème 3 :

Soit X_1 une variable aléatoire qui suit $\mathscr{B}(n_1, p)$
Soit X_2 une variable aléatoire qui suit $\mathscr{B}(n_2, p)$
On suppose X_1 et X_2 indépendantes
Alors la $X = X_1 + X_2$ suit $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$