LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

CORRECTION DU DEVOIR N°21

Exercice 1

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1- Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

Le choix se fait au hasard donc il y a équiprobabilité.

Le jeu consiste à choisir trois billes dans la boîte cubique **sans ordre ni remise parmi 13.**

$\Omega = \{ \{ b_1, b_2, b_3\} \quad \forall i \in [\![1 ;3]\!],\ b_i \in \{13 \text{ billes}\} \}$

Donc $|\Omega| = \binom{13}{3} = \dfrac{13\times12\times11}{3\times2} = 13\times2\times11 = 286$

X peut prendre pour valeurs: 0;1;2;3

- L'enfant tire 0 bille rouge donc tire 3 billes vertes parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{3}{3} = 1$ possibilité donc $P(X=0) = \dfrac{1}{286}$

- L'enfant tire 1 bille rouge donc tire 1 bille rouge parmi les 10 et 2 billes vertes parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{1}\times\binom{3}{2} = 10\times3 = 30$ possibilités donc $P(X=1) = \dfrac{30}{286} = \dfrac{15}{143}$

- L'enfant tire 2 billes rouges donc tire 2 billes rouges parmi les 10 et 1 bille verte parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{2}\times\binom{3}{1} = 45\times3 = 135$ possibilités donc $P(X=2) = \dfrac{135}{286}$

- L'enfant tire 3 billes rouges donc tire 3 billes rouges parmi les 10 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{3} = 120$ possibilités donc $P(X=3) = \dfrac{120}{286} = \dfrac{60}{143}$

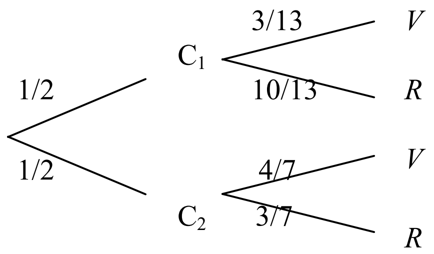
x_i	0	1	2	3	total
p_i	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286} = \frac{15}{243}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286} = \frac{60}{143}$	1
x_ip_i	0	$\frac{30}{286}$	$\frac{270}{286}$	$\frac{360}{286}$	$\frac{660}{286} = \frac{30}{13}$

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \sum_i x_i\, p_i = \dfrac{660}{286} = \dfrac{30}{13} \approx 2{,}3$ billes rouges.

2- Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.
On considère les événements suivants :
C_1 : « l'enfant choisit la boîte cubique » ;
C_2 : « l'enfant choisit la boîte cylindrique » ;
R : « l'enfant prend une bille rouge » ;
V : « l'enfant prend une bille verte » .
a) <u>Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu</u>.

Le choix de la boite étant fait au hasard, on a $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$



b) <u>Calculer la probabilité de l'événement R</u>

C_1 et C_2 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(R) = P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2) = P(C_1) \times P_{C_1}(R) + P(C_2) \times P_{C_2}(R)$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{10}{13} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{7} = \frac{5}{13} + \frac{3}{21} = \frac{5\times 21 + 3\times 13}{13\times 21} = \frac{109}{182}$$

<u>**Conclusion**</u> **:** $\boldsymbol{P(R) = \frac{109}{182}}$**.**

c) <u>Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique</u> ?

$$P(R) = \frac{109}{182} \neq 0 \text{ donc } P_R(C_1) = \frac{P(R\cap C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13}\times\frac{182}{109} = \frac{5\times 13\times 14}{13\times 109} = \frac{70}{109}$$

<u>**Conclusion**</u> **: la probabilité qu'elle provienne de la boite cubique sachant que l'enfant a choisi une bille rouge est** $\boldsymbol{\frac{70}{109}}$**.**

<u>Exercice 2</u>

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + e^{-x}$.
La courbe représentative de f est appelée $\mathscr{C}$.

1- <u>Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité</u>

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

2- <u>Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$</u>

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question 3.

en $-\infty$, on se retrouve avec une forme indéterminée du type "$(+\infty)+(-\infty)$" donc on factorise par le terme prépondérant ici e^{-x}

$$f(x)=e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}+1\right)=e^{-x}(xe^{x}+1)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

Donc étude des branches infinies

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}(xe^{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{x}}(xe^{x}+1)=-\infty \quad \begin{cases} \text{car } \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-} \text{ (croissances comparées)} \\ \lim\limits_{u\to0^{-}}\frac{1}{u}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x}+1)=1 \end{cases}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty}$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

3- a) Résoudre l'inéquation $1>e^{-x}$

$1>e^{-x}$ $D=\mathbb{R}$

$\ln(1)>\ln(e^{-x})$ car $x\mapsto\ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$

$0>-x$

$-x<0$

$x>0$

$\boldsymbol{S=\mathbb{R}_{+}^{*}}$

b) Étudier les variations de *f.*

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables

$\forall x\in Df, f'(x)=1+(-e^{-x})=1-e^{-x}$

Pour étudier le signe de $1-e^{-x}$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $1-e^{-x}\geq 0$ i.e. $1\geq e^{-x}$ ce qui a été fait à la question précédente.

signe de $f'(x)$: $-$ 0 $+$

Conclusion : *f* est décroissante sur $\mathbb{R}_{-}^{*}$ et *f* est croissante sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$

c) Dresser le tableau de variation de *f.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=0+e^{0}=0+1=1.$

4- a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Conclusion : la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = e^{-x}$
Or $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$
Conclusion : $\mathscr{C}$ est au-dessus de D.

5- Étudier la convexité de f.
$\forall\, x \in Df,\ \ f\,'(x) = 1 - e^{-x}$

$f\,'$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables
$\forall\, x \in Df,\ f\,''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ donc $f\,''(x) > 0$

Conclusion : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

6- a) Résoudre l'équation $e^{-x} = 3$
$e^{-x} = 3 \quad D = \mathbb{R}$
$\ln(e^{-x}) = \ln(3)$
$-x = \ln(3)$
$x = -\ln(3) \in D$
$\boldsymbol{S = \{-\ln(3)\}}$

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente T de coefficient directeur -2. Déterminer l'abscisse du point de contact A, son ordonnée, puis l'équation de T.
Soit a l'abscisse de A
$\mathscr{C}$ admet une tangente T de coefficient directeur -2 donc $f\,'(a) = -2$
or $f\,'(a) = 1 - e^{-a}$
et par suite $1 - e^{-a} = -2$ donc $e^{-a} = 3$ d'où $a = -\ln(3)$ d'après la question précédente.

L'ordonnée de A est $f(a) = f(-\ln(3)) = -\ln(3) + e^{\ln(3)} = -\ln(3) + 3 = 3 - \ln(3)$
Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est donnée par
$T:\ \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a = -\ln(3),\ \ f'(a) = -2$ et $f(a) = 3 - \ln(3)$

Conclusion :
$\boldsymbol{T:\ \ y = -2(x + \ln(3)) + 3 - \ln(3) = -2x - 2\ln(3) + 3 - \ln(3) = -2x + 3 - 3\ln(3)}$

Remarque : ne pas l'écrire sur la copie mais très utile pour construire la courbe
$\ln(3) \approx 1{,}1$ donc $A(\approx -1{,}1;\ \approx 1{,}9)$

c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T
f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc T est en dessous de $\mathscr{C}$

7- Écrire un programme `Python` afin de tracer $\mathscr{C}$ sur $[-100,100]$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
def f(x):
    return x+np.exp(-x)

X=np.arange(-100,100,0.1)
Y=f(X)
plt.plot(X,Y,'k',label="Cf")
plt.legend()
plt.show()
```

8- Construire $\mathscr{C}$, D et T.