LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**
EC 1

CORRECTION DE L'INTERROGATION ECRITE N°04

Exercice 1 :
Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

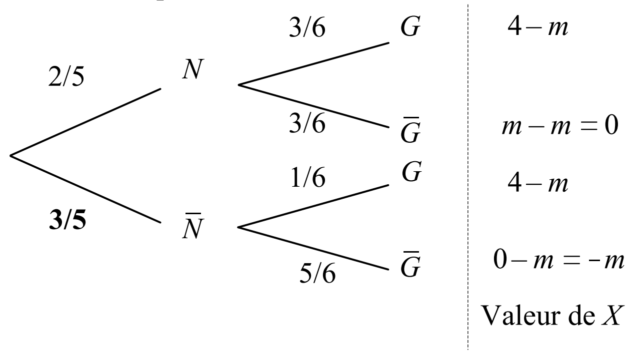
On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1- a) Déterminer la probabilité de l'évènement N.
Le jeu consiste à choisir quatre boules dans le sac **sans ordre ni remise** parmi 10
$\Omega = \{\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \ \forall\, i \in [\![1, 3]\!] \ , b_i \in \{10 \text{ boules}\}\}$
$|\Omega| = \binom{10}{4} = \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 10\times3\times7 = 210$
Il y a équiprobabilité car les boules sont indiscernables au toucher

L'évènement N revient à tirer une boule noire parmi 1 et 3 boules blanches parmi 9 sans ordre ni remise soit $\binom{1}{1}\times\binom{9}{3} = 1\times\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 3\times4\times7$ possibilités
donc $P(N) = \dfrac{3\times2\times2\times7}{2\times5\times3\times7} = \dfrac{2}{5}$

<u>Conclusion</u> : la probabilité de l'évènement N est $\dfrac{2}{5}$

b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$
Établissons un arbre pondéré de la situation



N et $\overline{N}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G\cap N) + P(G\cap\overline{N}) \\ &= P(N)P_N(G) + P(\overline{N})P_{\overline{N}}(G) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{6} + \frac{3}{5}\times\frac{1}{6} \qquad \text{car } P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ &= \frac{3\times3}{5\times3\times2} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$

c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

$$P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \frac{7}{10} \neq 0$$

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(N \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(N)P_N(\overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{2}{7}$$

Conclusion : la probabilité que le joueur ait tiré la boule noire sachant qu'il ne gagne pas est $\frac{2}{7}$

2- Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

$$X(\Omega) = \{4 - m, 0, -m\}$$

$$P(X = 0) = P(N \cap \overline{G}) = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

$$P(X = -m) = P(\overline{N} \cap \overline{G}) = P(\overline{N})P_{\overline{N}}(\overline{G}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$P(X = 4 - m) = P(G) = \frac{3}{10}$$

Conclusion : loi de X

x_i	$4-m$	0	$-m$	total
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	1
x_ip_i	$\frac{12-3m}{10}$	0	$\frac{-5m}{10}$	$\frac{12-3m}{10} - \frac{5m}{10}$

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

$$E(X) = \sum x_ip_i = \frac{12-8m}{10} = \frac{6-4m}{5}$$

c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$ donc $6 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Conclusion : le jeu sera équitable si la mise est 1,5€

3- Dans la suite de l'exercice **on prendra $m=1$ €** et on considère la même variable aléatoire X définie à la question 2

a) Déterminer dans ce cas l'espérance , la variance de X et l'écart type de X

x_i	$4-1=3$	0	-1	**total**
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	**1**
$x_i p_i$	$\frac{9}{10}$	0	$\frac{-5}{10}$	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{27}{10}$	0	$\frac{5}{10}$	$\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$

$$E(X)=\sum x_i p_i=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{16}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{16}{5}-\frac{4}{25}=\frac{80-4}{25}=\frac{76}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{76}{25}}=\frac{\sqrt{76}}{5}$$

Conclusion : $E(X)=\frac{2}{5}$, $V(X)=\frac{76}{25}$ et $\sigma(X)=\frac{\sqrt{76}}{5}$

b) Dans ce cas , pour qui le jeu est favorable :l'organisateur ou le joueur ?

En moyenne le jeu rapporte $\frac{2}{5}=0{,}4$ € par partie au joueur.

Conclusion : Le jeu est donc favorable au joueur

c) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ et la représenter graphiquement

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x)=P(X\leq x)$

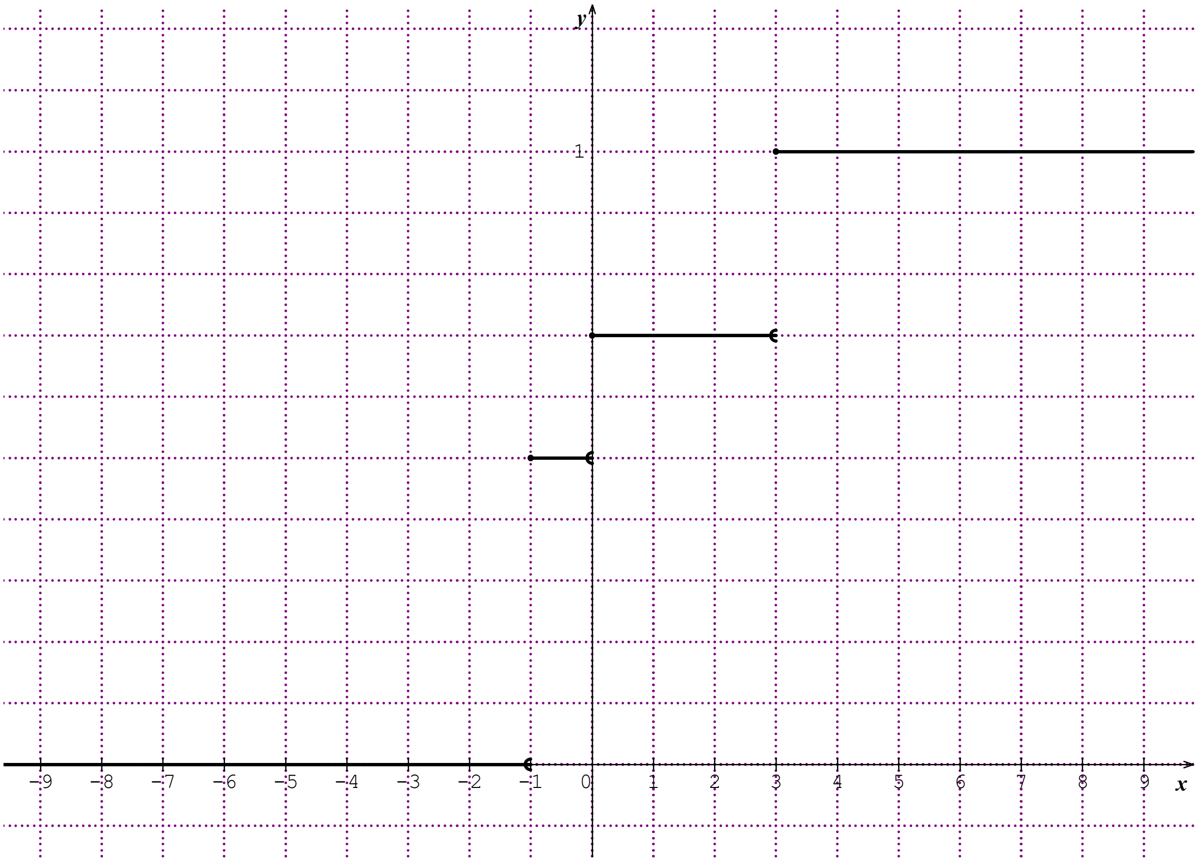
si $x<-1$, $F(x)=0$

si $-1\leq x\leq 0$, $F(x)=P(X=-1)=\frac{5}{10}$

si $0\leq x\leq 3$, $F(x)=P(X=-1)+P(X=0)=\frac{7}{10}$

si $x\geq 3$, $F(x)=1$

d'où la représentation graphique de F



Exercice 2 :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie **A** la fonction numérique *f* définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

de déterminer ensuite dans la partie **B.** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique .

Partie A

1- Soit P le polynôme définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$
Étudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$

1 est racine évidente de P car $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$
donc P est factorisable par $(x-1)$
Pour factoriser, j'utilise la méthode de Horner

	3	0	-1	-2
1		3	3	2
	3	3	2	0

$\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$

$P(x) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $3x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $\Delta = 3^2 - 4\times3\times2 = 9 - 24 = -15 < 0$

Donc l'équation n'admet pas de solution

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$
$3x^2+3x+2$	$+$	|	$+$
$P(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

car $\Delta < 0$ donc signe de a

2- Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$.

a) Déterminer les limites aux bornes de Dg

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} (x^3 - x + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} (-2\ln(x)) = +\infty \end{cases}$$

Remarque : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g Mais on s'en moque puisqu'il n'est pas demandée de construire la courbe représentative de g .

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

Remarque : il est inutile d'étudier les branches infinies puisqu'il n'est pas demandée de construire la courbe représentative de g .

b) Étudier les variations de la fonction g

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

$$\forall\, x \in Dg, g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{P(x)}{x}$$

$\forall\, x \in Dg,\ x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $P(x)$

Conclusion :

Si $0 < x \le 1$, $P(x) \le 0$ donc g est décroissante

Si $x \ge 1$, $P(x) \ge 0$ donc g est croissante

c) Déterminer le signe de $g(x)$.

tableau de variations de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$g(1) = 1 - 1 - 2\ln(1) + 1 = 1$ car $\ln(1) = 0$

Conclusion : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ $\boldsymbol{g(x) \ge 1 > 0}$

3- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$\forall\ x \in Df\ ,\ f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faites à la question B2

$\forall\ x \in Df\ , f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^3 + x + \ln(x)}{x^2}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 + x + \ln(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (Γ)

4- Dresser le tableau de variations de f

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$$\forall\ x \in Df,\ f\,'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln(x)}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

$\forall\ x \in Df,\ x > 0$ donc $f\,'(x)$ est du signe de $g(x)$ et par suite f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Partie B

(Γ) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- Soit h la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x) = x + \ln(x)$.

a) Étudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0\ ;1[$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ x > 0$ d'où $\dfrac{1}{x} > 0$ et par suite $h'(x) > 0$

donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

d'où le tableau de variations de h

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	
$h(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

<u>Conclusion :</u>

h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

donc h réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$

Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

de plus $h(1)=1+\ln(1)=1$

donc $0 \in]-\infty\,;1[$ et par suite $\alpha \in]0\,;1[$

b) <u>Compléter le script `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude</u> 10^{-1}

```
import numpy as np
def h(x):
    return x+np.log(x)

a=0.01
b=1
while np.abs(b-a) > 10**(-1):
    m=(a+b)/2
    if h(a)*h(m)>0 :
        a=m
    else :
        b=m
print(a)
```

Le programme précédent affiche 0,5

c) <u>Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.</u>

α est la solution de l'équation $h(x) = 0$

d'où $h(\alpha) = 0$ i.e. $\alpha + \ln(\alpha) = 0$ et par suite $\ln(\alpha) = -\alpha$

donc par passage à l'exponentielle il vient $e^{-\alpha} = \alpha$.

<u>Conclusion :</u> $e^{-\alpha} = \alpha$.

2- a) <u>Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$.</u>

$$f(x) - y_\Delta = f(x) - x = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> La droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$

b) Utiliser les résultats de la question **1 a)** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ).

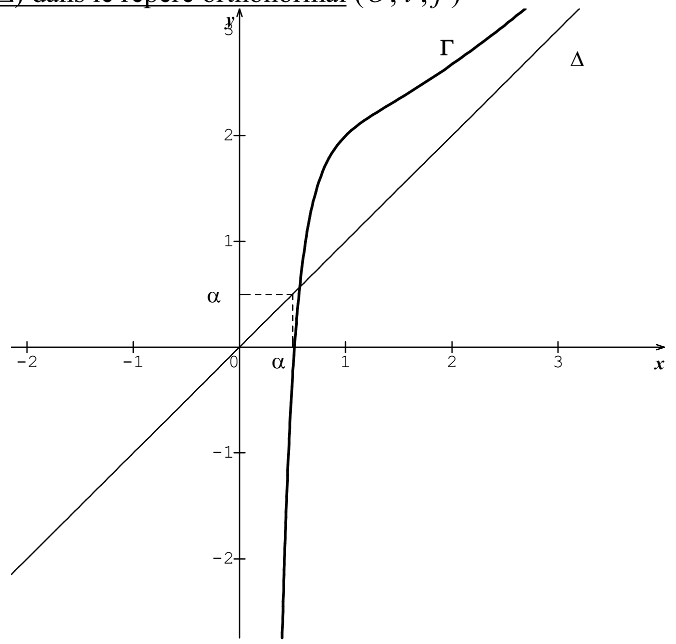
Étudier la position relative de (Γ) et (Δ) revient à étudier le signe de $f(x)-y_\Delta$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x^2}=\frac{x+\ln(x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$$

$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^2>0$ donc $f(x)-y_\Delta$ est du signe de $h(x)$

x	0		α	$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$
position	‖	(Γ) est en dessous	(Γ) coupe (Δ) en (α ; α)	(Γ) est au-dessus de (Δ)

3- Construire (Γ) et (Δ) dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$



Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=e^x-\ln(x)$

et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=xe^x-1$

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

Remarque : il est inutile d'étudier les branches infinies puisqu'il n'est pas demandée de construire la courbe représentative de g.

b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$ .En déduire le tableau des variations de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall\, x\in\mathbb{R}^+,\ g'(x)=1e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+}$, $e^{x} > 0$ et $1+x > 0$ donc $g'(x) > 0$ et par suite g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où le tableau de variations de g

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-1 $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

$g(0) = 0e^{0} - 1 = 0 - 1 = -1.$

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

g est continue sur $[0, +\infty[$ car dérivable
g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ d'après le tableau de variations
$g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = + -\infty$
Donc g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[\,) = [-1, +\infty[$
Or $0 \in [-1, +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$

Conclusion :
L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$
De plus $g(0)=-1<0$ et $g(1)=1e-1=e-1>0$ car e $\approx$ 2,7 donc $\alpha \in [0, 1]$.

d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
d'après le tableau de variations on a la tableau de signe de $g(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

2- a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Pour enlever la forme indéterminée $+\infty - \infty$ en $+\infty$ je factorise par le terme prépondérant e^{x}

$$f(x) = e^{x} - \ln(x) = e^{x}\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^{x}}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^{x}} = 0$ (croissances comparées) d'où $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{e^{x}}\right) = 1$

d'où étude des branches infinies

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^{x}}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty \text{ (croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{e^{x}}\right) = 1 \end{cases}$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ courbe représentative de f

b) <u>Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$</u>

<u>En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.</u>

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivable.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ (**fait à la question 1d**)

d'où le tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) <u>Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$</u>

α est définie par $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha e^\alpha - 1 = 0$ et par suite $\alpha e^\alpha = 1$

or $\alpha \in]0, 1]$ car $g(0) = -1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$

et par suite $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$ et par passage au logarithme népérien , car $\alpha > 0$, il vient $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ln(e^\alpha)$

donc $-\ln(\alpha) = \alpha$

De plus $f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha$ car $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha = -\ln(\alpha)$

<u>**Conclusion :**</u> $\mathbf{\frac{1}{\alpha} = e^\alpha}$ **et** $\mathbf{f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha}$

3- a) <u>Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$: $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$</u>

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$

f' est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in Df, \; f''(x) = e^x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x + \frac{1}{x^2}$

b) <u>Étudier la convexité de f sur $]0, +\infty[$.</u>

$\forall x \in Df, \; e^x > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$ donc $f''(x) > 0$ et par suite f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

<u>**Conclusion :**</u> **f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$**

4- a) <u>Donner une équation de la tangente T à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1</u>

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donnée par

$T : \; y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = e^1 - \frac{1}{1} = e - 1$ et $f(1) = e^1 - \ln(1) = e$

donc $T : \; y = (e-1)(x-1) + e$ i.e $y = (e-1)x + 1$

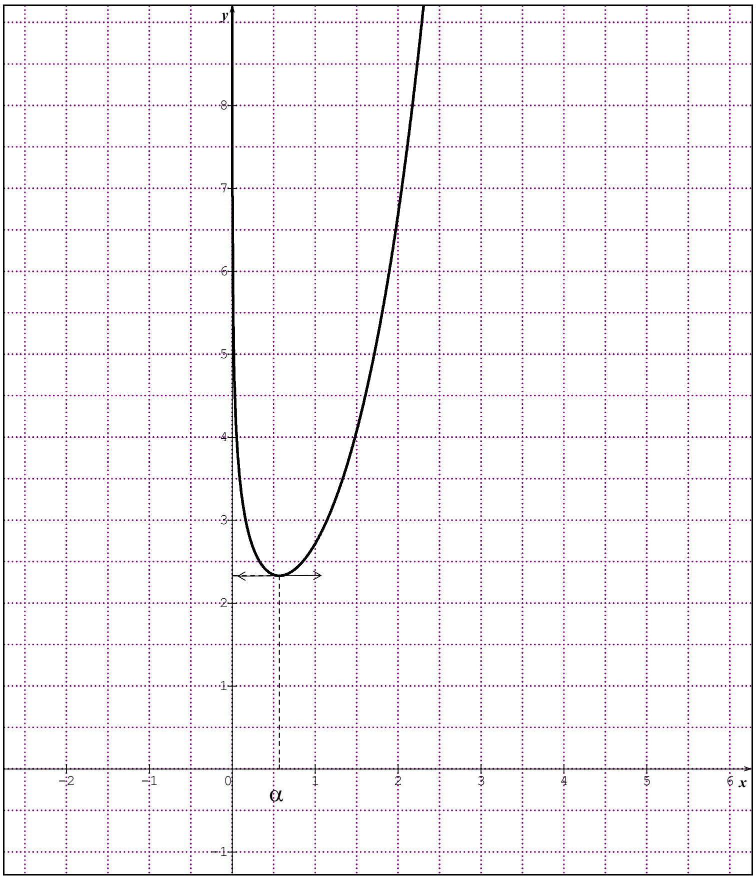
Conclusion :

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est $y=(e-1)x+1$

b) Étudier la position relative de T et de la représentation graphique de f.

f est convexe **donc T est en dessous de $\mathscr{C}$**

5- Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm. On donne $\alpha \approx 0{,}57$. et $f(\alpha) \approx 2{,}33$



Exercice 4:

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président, i.e. le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène.
Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

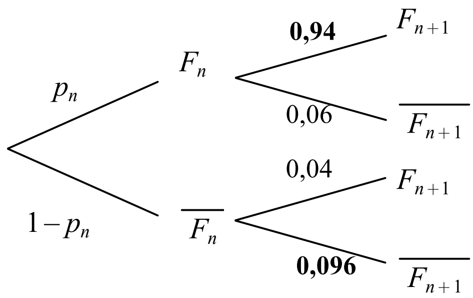
Le sondage réalisé immédiatement après l'élection du président indique que ce dernier jouit d'une cote de popularité de 55%. En outre, les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- ⇨ 6% des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- ⇨ 4% des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note F_n l'événement « la personne interrogée a une opinion favorable n mois après l'élection du président ».
On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(F_n)$

1- a) Donner p_0, $P_{F_n}(F_{n+1})$ et $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$

Établissons un arbre pondéré de la situation



$P_{F_n}(F_{n+1}) = 1 - P_{F_n}\left(\overline{F_{n+1}}\right) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

$P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0{,}04$

Le sondage réalisé immédiatement après l'élection du président indique que ce dernier jouit d'une cote de popularité de 55%. donc $p_0 = 0{,}55$

Conclusion : $p_0 = 0{,}55$ et $P_{F_n}(F_{n+1}) = 0{,}94$ et $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0{,}04$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}04$

F_n et $\overline{F_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} &= P(F_{n+1}) = P(F_n \cap F_{n+1}) + P\left(\overline{F_n} \cap F_{n+1}\right) \\
&= P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P\left(\overline{F_n}\right)P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \\
&= 0{,}94p_n + 0{,}04(1-p_n) \\
&= 0{,}94p_n + 0{,}04 - 0{,}04p_n \\
&= 0{,}9p_n + 0{,}04
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}04$

c) Compléter les 2 scripts `Python` qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif n, calculent et affichent la valeur de p_n.

```
#Programme 1
n=int(input('n='))
p=0.55 # p0
for k in range(1,n+1):
    p=0.9*p+0.04
print(p)
```

```
#Programme 2
n=int(input('n='))
import numpy as np
p=np.zeros(n+1)
p[0]=0.55 # p0
for k in range (1,n+1):
    p[k]=0.9*p[k-1]+0.04
print(p)
```

2- a) Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

La suite (p_n) vérifie $p_0 = 0{,}55$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}04$ donc (p_n) est une suite st une suite arithmético-géométrique.

- Recherche du point fixe

$x = 0{,}9x + 0{,}04 \Leftrightarrow x - 0{,}9x = 0{,}04 \Leftrightarrow 0{,}1x = 0{,}04 \Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}04}{0{,}1} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

- Suite auxiliaire

On définie la suite (v_n) par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = p_n - 0{,}4$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}9p_n + 0{,}04\ - 0{,}4 = 0{,}9p_n - 0{,}36 = 0{,}9(p_n - 0{,}4) = 0{,}9v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = p_0$
$-0{,}4 = 0{,}55 - 0{,}4 = 0{,}15$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 0{,}15 \times (0{,}9)^n$

- Expression de p_n

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p_n = v_n + 0{,}4 = 0{,}15 \times (0{,}9)^n + 0{,}4$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N}, p_n = 0{,}15 \times (0{,}9)^n + 0{,}4}$

b) Déterminer la limite de la suite (p_n)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{p_n = 0{,}4}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}9)^n = 0$ $(-1 < 0{,}9 < 1)$

c) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $0{,}15(0{,}9)^n + 0{,}4 \leq 0{,}45$

$0{,}15(0{,}9)^n + 0{,}4 \leq 0{,}45$

$0{,}15(0{,}9)^n \leq 0{,}45 - 0{,}4$

$0{,}15(0{,}9)^n \leq 0{,}05$

$(0{,}9)^n \leq \dfrac{1}{3}$ car $\dfrac{0{,}05}{0{,}15} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

$\ln(0{,}9)^n \leq \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$n\ln(0{,}9) \leq -\ln(3)$

$n \geq -\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}9)}$ car $\ln(0{,}9) < 0$ $(0 < 0{,}9 < 1)$

or $\dfrac{\ln(3)}{\ln(0{,}9)} \approx -10{,}4$ d'après le calcul effectué par `Python`

Conclusion : $\boldsymbol{S = [\![11;+\infty[\![}$

d) On considère le programme Python suivant :

```
u=0.55 # p0
while u >= 0.5:
    u=0.9*u+0.04
    n=n+1
print (n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 4.
Quelle est la signification de ce résultat ?

Le programme calcule p_n tant que cette dernière valeur est supérieure ou égale à 0,5 et affiche ensuite la première valeur de n pour laquelle l'opération ci-dessus n'est pas effectuée.
Puisque le résultat affiché est 4, c'est que **4 est la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n < 0,5$.**
On a donc $p_3 \geq 0,5$ et $p_4 < 0,5$.