LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**
EC 1

DS N°04
Durée 4h

Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et tout matériel électronique est interdit.

EXERCICE 1.

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1- **a**) Déterminer la probabilité de l'évènement N.

b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$

c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2- Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3- Dans la suite de l'exercice **on prendra $m=1$ €** et on considère la même variable aléatoire X définie à la question 2

a) Déterminer dans ce cas l'espérance ,la variance de X et l'écart type de X

b) Dans ce cas , pour qui le jeu est favorable :l'organisateur ou le joueur ?

c) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ et la représenter graphiquement

EXERCICE 2.

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie **A** la fonction numérique *f* définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

de déterminer ensuite dans la partie **B.** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique .

Partie A

1- Soit P le polynôme définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$
Étudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$

2- Soit g la fonction numérique définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$.
a) Déterminer les limites aux bornes de Dg
b) Étudier les variations de la fonction g
c) Déterminer le signe de $g\,(x)$.

3- Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.

4- Dresser le tableau de variations de f

Partie B

(Γ) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = x + \ln(x)$.
a) Étudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle]0 ;1[.
b) Compléter le script Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1}

```
import numpy as np
def h(x):
     ……………………………………..

a=0.01
b=.....
while ……………………………………..
     m=……………………………………..
     if h(a)*h(m)>0 :…………..
……………………………………..
……………………………………..
……………………………………..
print(…)
```

Le programme précédent affiche 0,5

b) Montrer que l'on a $e^{-\alpha} = \alpha$.

2- **a)** Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en + ∞.
b) Utiliser les résultats de la question **1 a)** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ).

3- Construire (Γ) et (Δ) dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE 3.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln(x)$

et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1- **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0, +\infty[$ .En déduire le tableau des variations de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2- **a)** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.

c) Justifier que le réel α vérifie $\dfrac{1}{\alpha} = e^{\alpha}$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

3- **a)** Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$: $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$

b) Étudier la convexité de f sur $]0, +\infty[$.

4- **a)** Donner une équation de la tangente T à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1

b) Étudier la position relative de T et de la représentation graphique de f.

5- Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. On donne $\alpha \approx 0{,}57$ et $f(\alpha) \approx 2{,}33$

EXERCICE 4.

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président, i.e. le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène.
Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

Le sondage réalisé immédiatement après l'élection du président indique que ce dernier jouit d'une cote de popularité de 55%. En outre, les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- ⇨ 6% des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- ⇨ 4% des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note F_n l'événement « la personne interrogée a une opinion favorable n mois après l'élection du président ».
On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(F_n)$

1- a) Donner p_0, $P_{F_n}(F_{n+1})$ et $P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}04$

c) Compléter les 2 scripts Python qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif n, calculent et affichent la valeur de p_n.

```
#Programme 1
n=int(input('n='))
p=......................................
for k .................................
..................................
print(p)
```

```
#Programme 2
n=int(input('n='))
import numpy as np
p=np.zeros(n+1)
p[......]=......
for k .................................
    ..................................
print(p)
```

2- a) Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (p_n) .

c) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $0{,}15(0{,}9)^n + 0{,}4 \leq 0{,}45$.
On pourra s'aider du calcul suivant effectué dans la console Python

```
>>>import numpy as np
>>>np.log(3)/np.log(0.9)
-10.427172663391419
```

d) On considère le programme Python suivant :

```
u=0.55 # p0
while u >= 0.5:
    u=0.9*u+0.04
    n=n+1
print (n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 4.
Quelle est la signification de ce résultat ?