LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

DEVOIR N°22

(A rendre le Lundi 19 Mai)

Exercice 1 :

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$.

On note Cf la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df et étudier la parité

2- Étude des variations de la dérivée f'

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle Df

b) Étudier les variations de f' sur Df.

c) Déterminer les limites de f' aux bornes de Df. Vous détaillerez vos calculs.

d) Dresser le tableau de variation de $f'(x)$

3- Étude du signe de $f'(x)$.

a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à Df puis que α appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.

b) Proposer un script Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}

c) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

4- Étude des variations de f

a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle Df

b) Déterminer les limites de f aux bornes de Df ainsi que les branches infinies si nécessaire.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5- Étude des tangentes à Cf

a) Soit $x_0 \in Df$, on appelle T_{x_0} la tangente à Cf au point d'abscisse x_0

Déterminer la position relative de Cf et de T_{x_0}. (on pourra s'aider de la question **2a)**).

b) Déterminer une équation de la droite T_0, tangente à Cf au point d'abscisse 0 puis tracer T_0

c) Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par le point $O(0,0)$, origine du repère puis tracer ces droites.

6- Écrire un programme Python afin de tracer $\mathscr{C}$ sur]-2, 10]

7- Tracer la courbe Cf dans le même repère que les tangentes.

On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur 0,8.

Exercice 2 :

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1- Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$

2- Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

3- Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

4- On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer la probabilité qu'au moins une personne soit aller au 2e niveau.
c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau?

5- Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.
Vous traiterez cette questions de deux manières: par les calculs et par `Python`.

On donne $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 11{,}3$.