

CORRECTION DU DEVOIR N°22

**Exercice 1 :**

On appelle  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  noté  $Df$  et étudier la parité**

$$f \text{ existe} \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

$$Df = ]-2 ; +\infty[.$$

**2- Étude des variations de la dérivée  $f'$**

**a) Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $Df$ .**

$f$  est dérivable sur  $Df$  comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f'(x) = 1 \times \ln(x+2) + x \times \frac{1}{x+2} = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}.$$

$f'$  est dérivable sur  $Df$  comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1(x+2) - 1x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

**Conclusion :**  $\forall x \in Df, f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$  et  $f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$

**b) Étudier les variations de  $f'$  sur  $Df$ .**

Pour étudier les variations de  $f'$ , il faut étudier le signe de  $f''(x)$

$$\forall x \in Df, f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$\forall x \in Df, x+2 > 0 \text{ d'où } \frac{1}{x+2} > 0 \text{ et } \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \text{ d'où } f''(x) > 0 \text{ et par suite } f' \text{ est croissante sur } Df$$

**Conclusion :**  $f'$  est croissante (et même strictement croissante) sur  $Df$

**c) Déterminer les limites de  $f'$  aux bornes de  $Df$**

$$\forall x \in Df, f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln(x+2) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+2) = 0^+ \\ \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty \end{cases} \text{ car signe de } (x+2) : \begin{array}{c} - \quad \oplus \quad + \\ \hline -2 \end{array} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x+2} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+2) = 0^+ \end{cases}$$

donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f'(x) = -\infty}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

d) Dresser le tableau de variation de  $f'(x)$

|          |      |          |           |
|----------|------|----------|-----------|
| $x$      | $-2$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ |      | $+$      |           |
| $f'(x)$  |      | $0$      | $+\infty$ |

$-\infty \nearrow$

3- Étude du signe de  $f'(x)$ .

a) Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à  $Df$  puis que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[-1; 0]$ .

$f'$  est continue sur  $] -2 ; +\infty[$  car dérivable

$f'$  est strictement croissante sur  $] -2 ; +\infty[$  d'après le tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

donc  $f'$  réalise une bijection de  $] -2 ; +\infty[$  sur  $f'([ -2 ; +\infty[) = \mathbb{R}$

Or  $0 \in \mathbb{R}$  donc l'équation  $f'(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ] -2 ; +\infty[$

$$\text{De plus } f'(-1) = \ln(1) + \frac{-1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0 \text{ et } f'(0) = \ln(2) + \frac{0}{2} = \ln(2) \approx 0,7 > 0$$

donc  $\alpha \in [-1; 0]$ .

**Conclusion :** L'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à  $] -2 ; +\infty[$  puis que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[-1; 0]$ .

b) Proposer un script Python permettant d'encadrer  $\alpha$  dans un intervalle d'amplitude  $10^{-2}$

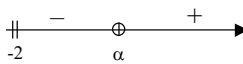
Cette question attend l'algorithme de la dichotomie appliqué à  $f'(x)$  noté  $g(x)$  car  $f'(x)$  ne peut s'écrire en Python

```
import numpy as np
def g(x):
    y = np.log(x+2) + x/(x+2)
    return y

a=-1
b=0
while np.abs(b-a) >= 10**(-2):
    m=(a+b)/2
    if g(a)*g(m)<0 :
        b=m
    else :
        a=m
print(a)
```

c) En déduire le signe de  $f'(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

D'après le tableau de variation on en déduit le signe de  $f'(x)$  :



#### 4- Étude des variations de $f$

a) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $Df$

Étudier les variations de  $f$  revient à étudier le signe de  $f'(x)$

**Conclusion** :  $f$  est décroissante sur  $] -2 ; \alpha ]$  et croissante sur  $[\alpha ; +\infty[$

b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$  ainsi que les branches infinies si nécessaire.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln(x+2) = -\infty \text{ justifiée à la question 2c} \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 1 = 1 \end{cases}$$

**La droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à  $Cf$**

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) = +\infty \text{ justifiée à la question 2c} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

Étude des branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x\ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \ln(x+2) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) = +\infty \end{cases}$$

**$Cf$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $+\infty$**

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

| $x$     | -2        | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +           | 0 -       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

#### 5- Étude des tangentes à $Cf$

a) Soit  $x_0 \in Df$ , on appelle  $T_{x_0}$  la tangente à  $Cf$  au point d'abscisse  $x_0$

Déterminer la position relative de  $Cf$  et de  $T_{x_0}$  (on pourra s'aider de la question 2a).

À la question 2a) on a calculé  $f''(x)$  ce qui nous permet d'étudier la convexité.

À la question 2b) on a prouvé que  $f''(x) > 0$  sur  $Df$  donc  $f$  est convexe et par suite  $Cf$  est au-dessus de  $T_{x_0}$ .

**Conclusion** :  $Cf$  est au-dessus de  $T_{x_0}$ .

**b) Déterminer une équation de la droite  $T_0$ , tangente à  $Cf$  au point d'abscisse 0 puis tracer  $T_0$**

Une équation cartésienne de la tangente  $T_0$  à  $Cf$  au point d'abscisse 0 est donnée par

$$T_0: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

avec  $f'(0) = \ln(2)$  et  $f(0) = 1$

donc  $T_0: y = \ln(2)(x - 0) + 1$  i.e  $y = x\ln(2) + 1$

**Conclusion :**

**Une équation cartésienne de la tangente  $T_0$ , tangente à  $Cf$  au point d'abscisse 0 est  $y = x\ln(2) + 1$**

**c) Trouver les réels  $x_0$  pour lesquels les tangentes  $T_{x_0}$  passent par le point  $O(0,0)$ , origine du repère puis tracer ces droites.**

Une équation cartésienne de la tangente  $T_{x_0}$  à  $Cf$  au point d'abscisse  $x_0$  est donnée par

$$T_{x_0}: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

avec  $f'(x_0) = \ln(x_0 + 2) + \frac{x_0}{x_0 + 2}$  et  $f(x_0) = 1 + x_0\ln(x_0 + 2)$

$$\text{donc } T_{x_0}: y = \left( \ln(x_0 + 2) + \frac{x_0}{x_0 + 2} \right) (x - x_0) + 1 + x_0\ln(x_0 + 2)$$

Le point  $O(0,0)$ , origine du repère appartient à  $T_{x_0}$  donc :

$$0 = \left( \ln(x_0 + 2) + \frac{x_0}{x_0 + 2} \right) (0 - x_0) + 1 + x_0\ln(x_0 + 2)$$

on développe et on obtient :  $-x_0\ln(x_0 + 2) - \frac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 + x_0\ln(x_0 + 2) = 0$

$$\text{donc } 1 - \frac{x_0^2}{2 + x_0} = 0$$

$$-x_0^2 + x_0 + 2 = 0$$

$x_0$  est solution de l'équation  $-x^2 + x + 2 = 0$

$$\text{or } -x^2 + x + 2 = (x + 1)(-x + 2)$$

donc  $x_0 = -1$  ou  $x_0 = 2$

Une équation cartésienne de la tangente  $T_{-1}$  à  $Cf$  au point d'abscisse  $-1$  est donnée par

$$T_{-1}: y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

avec  $f'(-1) = -1$  et  $f(-1) = 1$

donc  $T_{-1}: y = -1(x + 1) + 1$  i.e  $y = -x$

Une équation cartésienne de la tangente  $T_2$  à  $Cf$  au point d'abscisse 2 est donnée par

$$T_2: y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

avec  $f'(2) = \ln(4) + \frac{2}{4} = \ln(4) + \frac{1}{2}$  et  $f(2) = 1 + 2\ln(4)$

$$\text{donc } T_2: y = \left( \ln(4) + \frac{1}{2} \right) (x - 2) + 1 + 2\ln(4) \text{ i.e } y = \left( \ln(4) + \frac{1}{2} \right) x$$

je vous rappelle que  $\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2) \approx 1,4$  d'où  $\ln(4) + \frac{1}{2} \approx 1,9$

**Conclusion : Il existe deux réels  $x_0$  qui répondent à la question.**

$$x_0 = -1 \text{ et } T_{-1} : y = -x \text{ et } x_0 = 2 \text{ et } T_2 : y = \left( \ln(4) + \frac{1}{2} \right) x$$

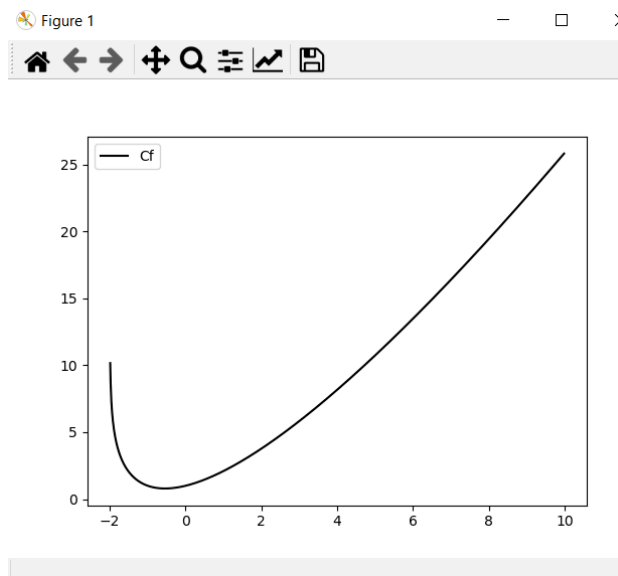
#### 6- Écrire un programme Python afin de tracer $\mathcal{C}$ sur $]-2, 10]$

J'ai mis -1.99 pour éviter un message d'erreur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure()
def f(x):
    return 1+x*np.log(x+2)

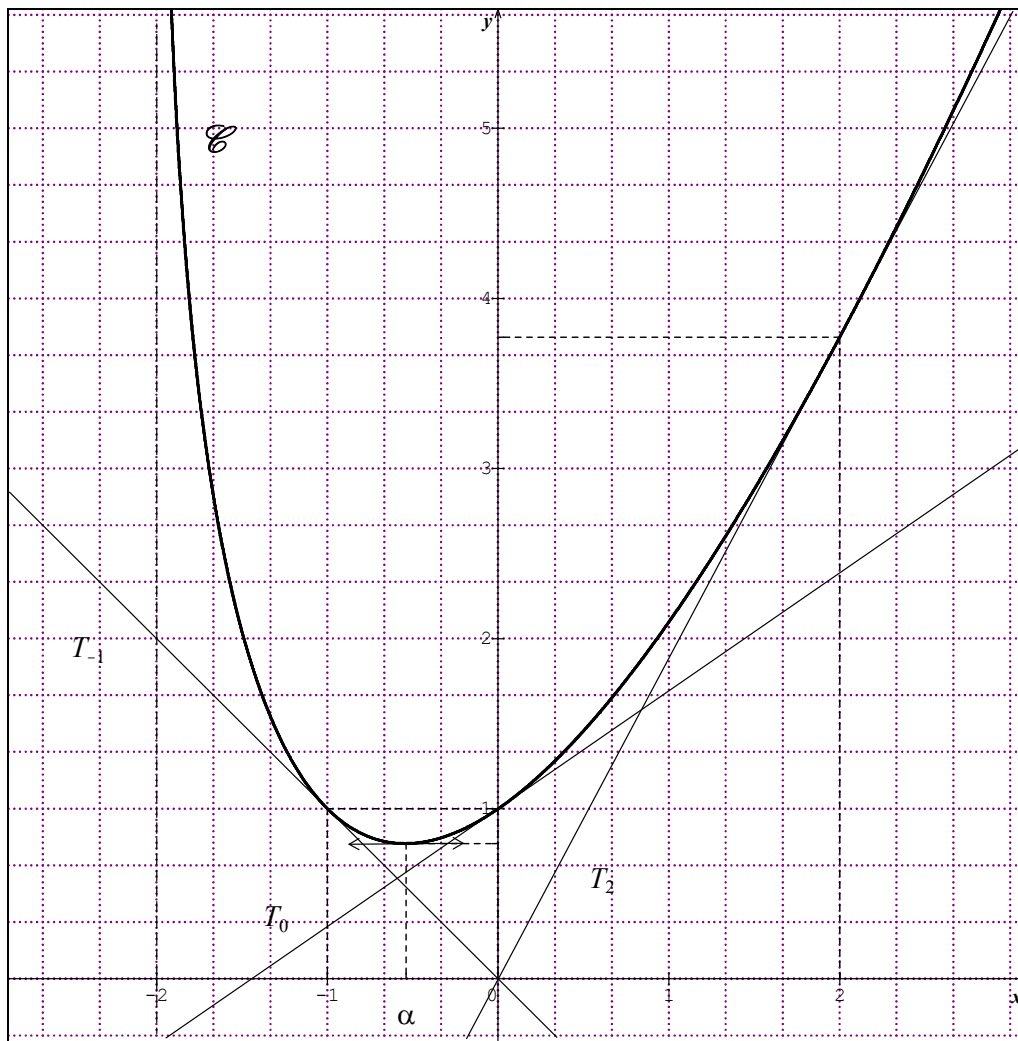
X=np.arange(-1.99,10,0.01)
Y=f(X)
plt.plot(X,Y,'k',label="Cf")
plt.legend()
plt.show()
```

on obtient :



#### 7- Tracer la courbe $C_f$

On prendra pour  $\alpha$  la valeur  $-0,54$  et pour  $f(\alpha)$  la valeur  $0,8$ .



### Exercice 2 :

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre? »

Voici les réponses :

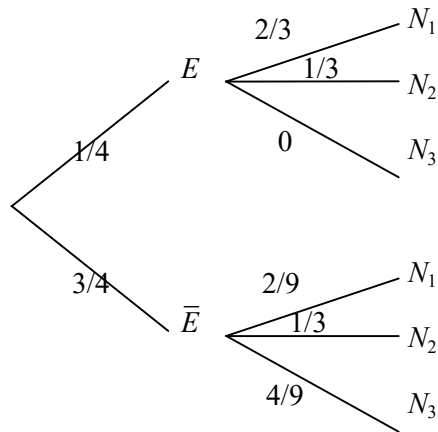
- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les événements suivants :

- ☐  $N_1$  : « La personne va au premier niveau. »
- ☐  $N_2$  : « La personne va au deuxième niveau. »
- ☐  $N_3$  : « La personne va au troisième niveau. »
- ☐  $E$  : « La personne emprunte l'escalier. »

1- Faire un arbre en justifiant soigneusement chaque probabilité.



$$\Omega_1 = \{300 \text{ personnes}\}$$

$$|\Omega_1| = 300$$

Il y a équiprobabilité car la personne est choisie au hasard

$$\text{d'où } P(E) = \frac{75}{300} = \frac{75}{4 \times 75} = \frac{1}{4} \text{ et } P(\bar{E}) = \frac{225}{300} = \frac{3 \times 75}{4 \times 75} = \frac{3}{4}$$

$$\Omega_2 = \{225 \text{ personnes empruntant l'ascenseur}\}$$

$$|\Omega_2| = 225$$

Il y a équiprobabilité car la personne est choisie au hasard

$$P_{\bar{E}}(N_1) = \frac{50}{225} = \frac{2 \times 25}{9 \times 25} = \frac{2}{9}$$

$$P_{\bar{E}}(N_2) = \frac{75}{225} = \frac{3 \times 25}{9 \times 25} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\bar{E}}(N_3) = \frac{100}{225} = \frac{4 \times 25}{9 \times 25} = \frac{4}{9}$$

2- Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à  $\frac{1}{12}$

$$P(E \cap N_2) = P(E)P_E(N_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

**Conclusion** : la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à  $\frac{1}{12}$

3- Montrer que les événements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont équiprobables.

La question revient à calculer les trois probabilités

$E$  et  $\bar{E}$  forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(N_1) &= P(N_1 \cap E) + P(N_1 \cap \bar{E}) \\ &= P(E) \times P_E(N_1) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(N_1) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(N_2) &= P(N_2 \cap E) + P(N_2 \cap \bar{E}) \\
 &= P(E) \times P_E(N_2) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(N_2) \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(N_3) &= P(N_3 \cap E) + P(N_3 \cap \bar{E}) \\
 &= P(E) \times P_E(N_3) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(N_3) \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Conclusion :** les évènements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont équiprobables.

4- Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

$$P(N_2) = \frac{1}{3} \neq 0 \text{ donc } P_{N_2}(E) = \frac{P(N_2 \cap E)}{P(N_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}$$

**Conclusion :** la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau est  $\frac{1}{4}$

5- On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

L'épreuve consiste à interroger une personne. Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "la personne va au 2e niveau" de probabilité  $\frac{1}{3}$
- ♦ l'échec : l'événement contraire de probabilité  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

L'expérience se répète 20 fois de **manière identique et indépendante**.

On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 5 expériences.

**Conclusion :**

$X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{3}\right)$

$X(\Omega) = \llbracket 0 ; 20 \rrbracket$

$\forall k \in \llbracket 0 ; 20 \rrbracket, P(X=k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$

b) Déterminer la probabilité qu'au moins une personne soit aller au 2e niveau.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{20-0} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

**Conclusion :** la probabilité qu'au moins une personne soit aller au 2e niveau est  $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau ?

$$E(X) = np = 20 \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,6$$

**Conclusion : En moyenne, un peu moins de 7 personnes sur 20 vont au 2e étage**

6- Soit  $n$  un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais  $n$  personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier  $n$  strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

L'épreuve consiste à interroger une personne . Elle a deux issues :

- ♦ le succès : "la personne va au 2e niveau" de probabilité  $\frac{1}{3}$
- ♦ l'échec : l'évènement contraire de probabilité  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

L'expérience se répète  $n$  fois de **manière identique et indépendante**.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les 5 expériences.

$Y$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$

$$Y(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, P(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

$$\text{On cherche } n \text{ tel que } P(Y \geq 1) \geq 0,99 \text{ et } P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

➤ **Méthode 1: Par les calculs**

$$P(Y \geq 1) \geq 0,99$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0,99$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq -0,01$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,01$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \ln(0,01) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0,01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \text{ car } 0 < \frac{2}{3} < 1 \text{ d'où } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 11,3. \text{ Il faut donc prendre au minimum } 12.$$

**Conclusion : sur 12 personnes, au moins une va au niveau 2 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.**

➤ **Méthode 2:** avec Python

On définit la suite  $(p_n)$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$  et la question revient à déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $p_n \geq 0,99$

```
n=0 # n est un compteur
p=0 # en remplaçant n par 0 dans pn
while p < 0.99 :
    n=n+1
    p=1-(2/3)**n
print(n)
```