LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

CORRECTION DU DEVOIR N°23

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des primitives sur un intervalle I à préciser des fonctions f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{12x+3}{4x^2+2x+5}$

f n'existe pas $\Leftrightarrow 4x^2+2x+5=0$

$\Delta = (2)^2-4(4)(5) = 4-80 = -76$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions

Donc $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$

f est continue sur Df comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$$f(x) = \frac{12x+3}{4x^2+2x+5} = \frac{3(4x+1)}{4x^2+2x+5} = \frac{3}{2} \times \frac{2(4x+1)}{4x^2+2x+5}$$

On reconnaît $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = 4x^2+2x+5$ donc $u' = 8x+2 = 2(4x+1)$

Conclusion :

$\boldsymbol{\forall\ x \in Df,\ F(x)=\dfrac{3}{2}\ln|4x^2+2x+5|+k\ = \ln(4x^2+2x+5)+k,\quad k \in \mathbb{R}}$

car $\boldsymbol{\Delta<0}$ donc $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R},\quad 4x^2+2x+5>0}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^3} = (2x+1)(x^2+x+3)^{-3}$

f n'existe pas $\Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta = (1)^2-4(1)(3) = 1-12 = -11$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions

Donc $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$

f est continue sur Df comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3} = 1\times(2x+1)(x^2+x+3)^{-3}$$

On reconnaît $u' \times u^{\alpha}$ avec $u = x^2+x+3$

Conclusion :

$\boldsymbol{\forall\ x \in Df,\ F(x)=\dfrac{(x^2+x+3)^{-2}}{-2}+k = -\dfrac{1}{2(x^2+x+3)^2}+k\ ,\ k \in \mathbb{R}}$

c) $f(x) = (3x+4)^9$

$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}}$

f est continue sur Df comme composée de fonctions continues donc admet des primitives

$f(x) = (3x+4)^9 = \frac{1}{3} \times 3(3x+4)^9$ On reconnaît $u' \times u^{\alpha}$ avec $u = 3x+4$

Conclusion :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x+4)^{10}}{10} + k = \frac{1}{30}(3x+4)^{10} + k\ \ ,\ k \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^3 + 8x^7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$

$Df = \mathbb{R}^*$

f est continue sur chaque intervalle de Df comme somme de fonctions continues donc admet des primitives

$f(x) = x^3 + 8x^7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = x^3 + 8x^7 - 3 \times \frac{1}{x} + x^{-2}$

Conclusion :

$\forall\ x \in \mathbb{R}_-^*,\ F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^8 - 3\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + k_1 = \frac{1}{4}x^4 + x^8 - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + k_1\ \ ,\ k_1 \in \mathbb{R}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x = \frac{1}{4}x^4 + x^8 - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + k_2\ \ ,\ k_2 \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^4 e^{x^5+1}$

$Df = \mathbb{R}$

f est continue sur Df comme produit de fonctions continues donc admet des primitives

$f(x) = x^4 e^{x^5+1} = \frac{1}{5} \times 5x^4 e^{x^5+1}$ On reconnaît $u' \times e^u$ avec $u = x^5+1$

Conclusion :

$\forall\ x \in Df,\ F(x) = \frac{1}{5} e^{x^5+1} + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln(x) - 1}{x}$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie *A*

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x)$

1- Étudier la fonction g (Dg , sens de variation , limites et tableau de variations) On ne demande pas de faire la courbe.

g existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $Dg = \mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 6) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-4\ln(x)) = +\infty \end{cases}$

$g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln(x) = -x^2\left(1 - \frac{6}{x^2} + 4\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{6}{x^2} + 4\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ croissances comparées} \end{cases} \end{cases}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -2x - \frac{4}{x} = \frac{-2x^2-4}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -2x^2-4 < 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) < 0$ et par suite g est décroissante

d'où le tableau de variation de g

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	||		$+$		
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2- a) <u>Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in [1, 2]$</u>

g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $g(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$

Or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

de plus $g(1) = -1+6 = 5 > 0$ et $g(2) = -4+6-4\ln(2) = 2-4\ln(2) \approx -0{,}8 < 0$

donc $\alpha \in [1, 2]$

<u>Conclusion</u> : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in [1, 2]$

b) <u>En déduire le tableau d'étude de signe de g sur Dg</u>

D'après le tableau de variation on en déduit le signe de $g(x)$:

x	0		α	
$g(x)$	||	$+$	0	$-$

c) <u>Écrire un programme Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-3}</u>
<u>Le programme devra comporter la ligne `g(a)*g(m)>0`</u>

```
import numpy as np
def g(x):
        return -x**2-6-4*np.log(x)

a=1
b=2
while np.abs(b-a) >=10**(-3):
    m=(a+b)/2
    if g(a)*g(m)>0 :
        a=m
    else :
        b=m
print(a)
```

Partie *B*

1-

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

f existe $\Leftrightarrow x>0$ donc $Df=\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\ln(x)-1}{x}=-\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln(x)-1)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+ \end{cases} \end{cases}$$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+3+2\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0 \text{ croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0 \end{cases}$$

l'étude des branches infinies sera faite à la question 2

b) <u>Déterminer la dérivée de f.</u>

f est dérivable sur Df comme somme de fonction dérivables

$$\forall x\in Df, f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{x}x-1(2\ln(x)-1)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{2-2\ln(x)+1}{x^2}=\frac{-x^2+6-4\ln(x)}{2x^2}$$

<u>Conclusion</u> : $\forall x\in Df, f'(x)=\dfrac{-x^2+6-4\ln(x)}{2x^2}$

c) <u>Montrer qu'en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe</u>

$$\forall x\in Df, f'(x)=\frac{-x^2+6-4\ln(x)}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$$

$\forall x\in Df$, $2x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

<u>Conclusion</u> : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe

d) <u>Dresser le tableau de variation de f.</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$		$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2- <u>Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique D en $+\infty$ dont on précisera l'équation</u>

On note D la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$

$$f(x)-y_D=\frac{2\ln(x)-1}{x}=2\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)-y_D) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : La droite D d'équation $y=-\frac{1}{2}x+3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

3- <u>Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D</u>

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x)-y_D = \dfrac{2\ln(x)-1}{x}$

or $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ donc $f(x)-y_D$ est du signe de $2\ln(x)-1$

Pour étudier le signe de $2\ln(x)-1$, je vais résoudre une inéquation , par exemple $2\ln(x)-1 \geq 0$

$2\ln(x)-1 \geq 0$

$\ln(x) \geq \dfrac{1}{2}$

$x \geq \sqrt{e}$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{e} = e^{1/2}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-y_D$	‖	$-$	0	$+$	
position	‖	$\mathscr{C}$ est en dessous de D	$\mathscr{C}$ coupe D en A	$\mathscr{C}$ est au-dessus de D	

A a pour coordonnées ($\sqrt{e}$, $f(\sqrt{e})$) avec $f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2}\sqrt{e}+3+\dfrac{2\times\frac{1}{2}-1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}\sqrt{e}+3$

4- <u>Déterminer le point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T est parallèle à D</u>

Je vous rappelle que deux droites parallèles ont le même coefficient directeur
et le coefficient directeur d'une droite est le nombre qui multiplie x

Soit b l'abscisse du point B de $\mathscr{C}$ où T est parallèle à D

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse b est donnée par

T : $y = f'(b)\,(x-b)+f(b) = xf'(b)+(-bf(b)+f(b))$

donc le coefficient directeur de T est $f'(b)$

Le coefficient directeur de D est $-\dfrac{1}{2}$

donc on a $f'(b) = -\dfrac{1}{2}$. Résolvons cette équation pour $b \in \mathbb{R}_+^*$

$f'(b) = -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{-b^2+6-4\ln(b)}{2b^2} = -\dfrac{1}{2}$

$-b^2+6-4\ln(b) = -b^2$

$6-4\ln(b) = 0$

$\ln(b) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$b = e^{\frac{3}{2}}$

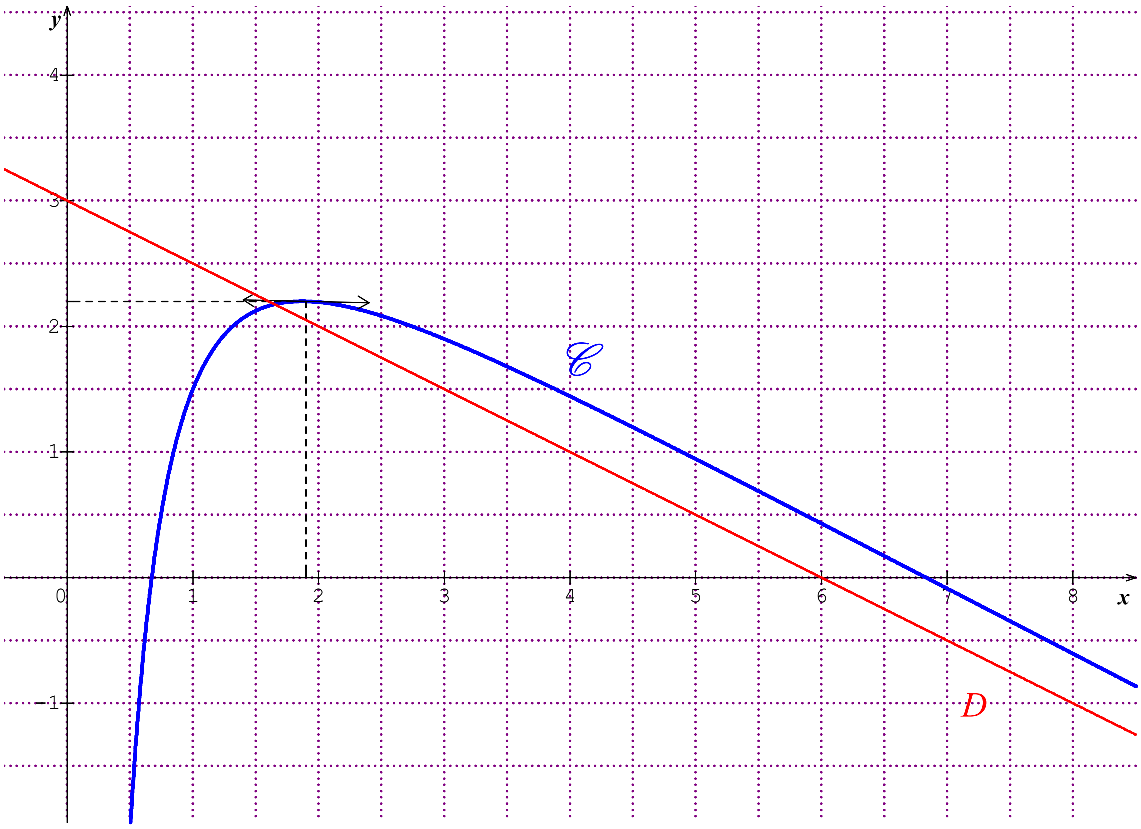
Conclusion : le point B a pour coordonnées $\left(e^{\frac{3}{2}}\ ,\ f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$

avec $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+3+\dfrac{2\times\frac{3}{2}-1}{e^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+3+2e^{-\frac{3}{2}}$

Remarque :

T a pour équation $y=f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\left(x-e^{\frac{3}{2}}\right)+f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$ donc $y=-\frac{1}{2}x+2e^{\frac{3}{2}}+3$

5- Construire $\mathscr{C}$, D . On donne $\alpha \approx 1{,}9$ et $f(\alpha) \approx 2{,}1$



Partie C

En remarquant que $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)-\frac{1}{x}$

Calculer $\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)\mathrm{d}x$

$\frac{1}{x}\times\ln(x)$ est du type $u'u$ avec $u(x)=\ln(x)$ donc une primitive est $\frac{u^2}{2}$ donc $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)\mathrm{d}x=\left[(\ln(x))^2-\ln(x)\right]_{e}^{\sqrt{e}}$$ car $\ln|x|=\ln(x)$ puisque $x\in[\sqrt{e},\ e]$ donc $x>0$

$$=\ln^2(e)-\ln(e)-(\ \ln^2(\sqrt{e})-\ln(\sqrt{e})\ )$$

$$=1-1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}}$

<u>Exercice 3 :</u>

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 centimètres au-dessus du sol.

À chaque rebond, la balle remonte aux $\frac{9}{10}$ de la hauteur atteinte précédemment.

h_0 = 100. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on désigne par h_n la hauteur en centimètres atteinte à l'issue du n-ième rebond.

1- <u>Calculer h_1 ,h_2.</u>

$\boldsymbol{h_1=0{,}9h_0=0{,}9\times100=90}$ **cm**

$\boldsymbol{h_2=0{,}9h_1=0{,}9\times90=81}$ **cm**

2- <u>Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n et en déduire la nature de la suite (h_n)</u>

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ h_{n+1}=0{,}9h_n$

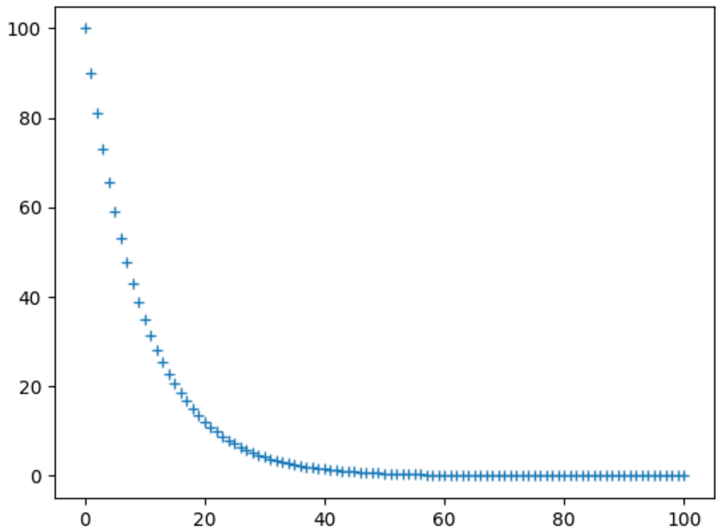
<u>Conclusion :</u>

La suite (h_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}9$ et de premier terme $h_0=100$

3- On désire représenter graphiquement la suite (h_n) . Compléter le script Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n=int(input('n='))
h=np.zeros(n+1)
h[0]=100
for k in range (1,n+1):
    h[k]=0.9*h[k-1]
plt.figure()
plt.plot(h,'+')
plt.show()
```

On a exécuté ce programme avec `n=100`



Quelle conjecture pouvez-vous dire sur la convergence de (h_n)

La suite (h_n) semble converger vers 0

4- En déduire la valeur de h_n en fonction de n.

$\forall\, n \in \mathbb{N},\, h_n = h_0 q^n = 100(0{,}9)^n$

5- Vérifier la conjecture de la question 3.

$\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$ car $-1 < 0{,}9 < 1$

Conclusion : la conjecture est vraie

6- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $100\times(0{,}9)^x \leq 30$

$100\times(0{,}9)^x \leq 30$

$(0{,}9)^x \leq \dfrac{30}{100}$

$\ln((0{,}9)^x) \leq \ln(0{,}3)$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$x\ln(0{,}9) \leq \ln(0{,}3)$

$x \geq \dfrac{\ln(0{,}3)}{\ln(0{,}9)}$ car $\ln(0{,}9) < 0$ ($0 < 0{,}9 < 1$)

Conclusion : $\boldsymbol{S = \left[\dfrac{\ln(0{,}3)}{\ln(0{,}9)}, +\infty\right[}$

b) À partir de combien de rebonds la balle demeurera-t-elle à moins de 30 centimètres du sol ?

soit x le nombre de rebond cherché donc $100\times(0{,}9)^x \leq 30$ et x doit être un entier

or $\dfrac{\ln(0{,}3)}{\ln(0{,}9)} \approx 11{,}47$

Conclusion :
A partir de 12 rebonds, la balle demeurera à moins de 30 centimètres du sol

7- La balle rebondit trois fois sur le sol.
Calculer la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol.

Détaillons le trajet de la balle

- Chute initiale : $h_0 = 100$ cm
- Remonte à $h_1 = 0{,}9h_0 = 90$, puis rechute : soit $90+90 = 180$ cm
- Remonte à $h_2 = 0{,}9h_1 = 81$ cm , puis rechute : soit 81+81=162 cm
- Elle touche le sol à la fin de cette chute.

Conclusion : la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol. est 100+180+162=442 cm