LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

DEVOIR N°23
(A rendre le Lundi 26 Mai)

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des primitives sur un intervalle I à préciser des fonctions f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{12x+3}{4x^2+2x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^3}$

c) $f(x)=(3x+4)^9$

d) $f(x)=x^3+8x^7-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x)=x^4e^{x^5+1}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2\ln(x)-1}{x}$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie *A*

Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=-x^2+6-4\ln(x)$

1- Étudier la fonction g (Dg , sens de variation , limites et tableau de variations) On ne demande pas de faire la courbe.

2- **a)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α tel que $\alpha\in[1, 2]$

b) En déduire le tableau d'étude de signe de g sur Dg

c) Écrire un programme `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-3}
Le programme devra comporter la ligne `g(a)*g(m)>0`

Partie *B*

1-

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Déterminer la dérivée de f.

c) Montrer qu'en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe

d) Dresser le tableau de variation de f .

2- Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique D en $+\infty$ dont on précisera l'équation

3- Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D

4- Déterminer le point B de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T est parallèle à D

5- Construire $\mathscr{C}$, D . On donne $\alpha\approx 1{,}9$ et $f(\alpha)\approx 2{,}1$

Partie *C*

En remarquant que $f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+3\right)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)-\dfrac{1}{x}$

Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)\mathrm{d}x$

<u>Exercice 3 :</u>
Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 centimètres au-dessus du sol.

À chaque rebond, la balle remonte aux $\frac{9}{10}$ de la hauteur atteinte précédemment.

$h_0 = 100$. Pour n entier supérieur ou égal à 1, on désigne par h_n la hauteur en centimètres atteinte à l'issue du n-ième rebond.

1- Calculer h_1 ,h_2.

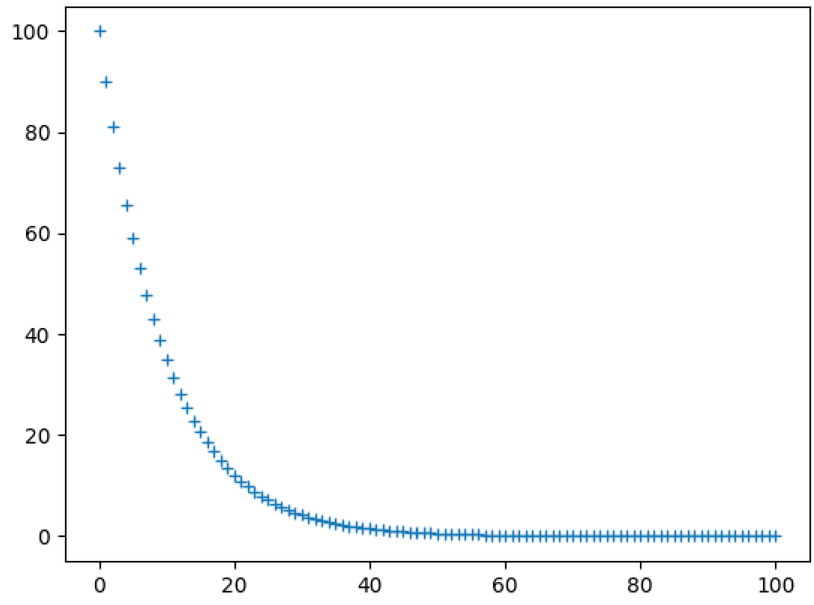
2- Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n et en déduire la nature de la suite (h_n)

3- On désire représenter graphiquement la suite (h_n) . Compléter le script Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n=int(input('n='))
h=np.zeros(n+1)
h[...................
for k in range (1,n+1):
.......................................
plt.figure()
plt.plot(h,'+')
plt.show()
```

On a exécuté ce programme avec `n=100`

Quelle conjecture pouvez-vous dire sur la convergence de (h_n)



6- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $100\times(0{,}9)^x \leq 30$
b) À partir de combien de rebonds la balle demeurera-t-elle à moins de 30 centimètres du sol ?

On donne $\frac{\ln(0{,}3)}{\ln(0{,}9)} \approx 11{,}47$

7- La balle rebondit trois fois sur le sol.
Calculer la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol.