CORRECTION DU TEST N°21

Exercice 1 :

Compléter le tableau suivant où F est une primitive de f en n'oubliant pas les conditions sur α et a **voir cours**

Exercice 2 :

Déterminer **toutes** les primitives des fonctions f dans chacun des cas suivants :

$f(x) = 12x^5 - \dfrac{4}{x^3} + 1 + e^x$

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}^*}$

f est continue sur Df comme somme de fonctions continues donc admet des primitives

$f(x) = 12x^5 - \dfrac{4}{x^3} + 1 + e^x = 12x^5 - 4x^{-3} + 1 + e^x$

Conclusion :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*_-,\ \boldsymbol{F(x) = 12\frac{1}{6}x^6 - 4\frac{x^{-2}}{-2} + x + e^x + k_1 = 2x^6 + \frac{2}{x^2} + x + e^x + k_1\ ,\ k_1 \in \mathbb{R}}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*_+,\ \boldsymbol{F(x) = 2x^6 + \frac{2}{x^2} + x + e^x + k_2\ ,\ k_2 \in \mathbb{R}}$

$f(x) = 4(2x+1)^8$

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

f est continue sur Df comme composée de fonctions continues donc admet des primitives

$f(x) = 4(2x+1)^8 = 2 \times 2(2x+1)^8$ on reconnaît $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 2x+1$

Conclusion :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x) = 2 \times \frac{1}{9}(2x+1)^9 + k = \frac{2}{9}(2x+1)^9 + k,\ k \in \mathbb{R}}$

$f(x) = \dfrac{6x+3}{(x^2+x+1)^2}$

f n'existe pas $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution et par suite $\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

f est continue sur Df comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$f(x) = \dfrac{6x+3}{(x^2+x+1)^2} = (6x+3)(x^2+x+1)^{-2} = 3 \times (2x+1)(x^2+x+1)^{-2}$

On reconnaît $u' \times u^\alpha$ avec $u = x^2 + x + 1$

Conclusion :

$\forall\ x \in Df,\ \boldsymbol{F(x) = 3\frac{(x^2+x+1)^{-1}}{-1} + k = -\frac{3}{x^2+x+1} + k\ ,\ k \in \mathbb{R}}$

$f(x) = \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2+1}}$

f existe $\Leftrightarrow x^2+1>0 \Leftrightarrow x^2>-1$ toujours vraie

$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}}$

f est continue sur Df comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$$f(x) = \frac{-7x}{\sqrt{x^2+1}} = -7x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{7}{2}\times 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\forall\, x \in Df,\ F(x) = -\frac{7}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = -\frac{7}{2}\times 2\sqrt{x^2+1} + k = -7\sqrt{x^2+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$

$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}}$ déjà prouvé

f est continue sur Df comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1} = 3\times\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ on reconnaît $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = x^2+x+1$

<u>Conclusion</u> :

$\forall\, x \in Df\ F(x) = 3\ln|x^2+x+1| + k = 3\ln(x^2+x+1) + k,\ k \in \mathbb{R}$

car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1>0\ \ (\Delta<0)$

$f(x) = 3e^{-2x+1}$

$Df = \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues donc admet des primitives

<u>Conclusion</u> :

$$\forall\, x \in Df,\ f(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x+1} + k\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$$