LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC 1

CORRECTION DU DEVOIR N°24

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie A : Étude de la fonction *f*

1- a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

On a une FI du type "$\infty\times0$". Pour l'enlever je développe

$$f(x) = (2x+1)e^{-2x} = 2xe^{-2x} + e^{-2x} = \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u} = 0 \text{ croissance comparées} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et la droite D, d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

Étant donnée qu'à la question 3 de la partie B, il faut tracer $\mathscr{C}$ on doit donc étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = f(x) - 0 = (2x+1)e^{-2x}$

or $\forall\ x \in Df = \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de $2x+1$

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$	0	$+$
position	$\mathscr{C}$ est en dessous de D	$\mathscr{C}$ coupe D en (-1/2, 0)	$\mathscr{C}$ est au-dessus de D

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x+1) = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$$

Étude des branches infinies

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} e^{-2x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

2- Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur Df comme produit de fonctions dérivable

$\forall\, x \in Df, f'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)(-2e^{-2x}) = e^{-2x}(2-4x-2) = -4xe^{-2x}$

$\forall\, x \in Df,\ e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$

signe de $f'(x)$: $+$ 0 $-$

3- Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(0) = 1e^0 = 1$

4- Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Soit a l'abscisse du point A.

A est à intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses alors $f(a) = 0$

Résolvons $f(a) = 0$

$(2a+1)e^{-2a} = 0$

$2a+1 = 0$ car $e^{-2a} \neq 0$

$a = -\dfrac{1}{2}$

Conclusion : A a pour coordonnée $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Partie B : Étude d'une tangente

1- Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en B.

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est donnée par

$T:\ y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ avec $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{2}e^{-1} = -2e^{-1}$ et $f(1) = 2e^{-1}$

donc $T:\ y = -2e^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2e^{-1}$ i. e $y = -\dfrac{2}{e}x + \dfrac{3}{e}$

Conclusion :

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$

2- On veut étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T sans utiliser la convexité pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - y_T$

a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

$g(x) = f(x) - y_T = f(x) + \dfrac{2}{e}x - \dfrac{3}{e}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) + \dfrac{2}{e} = -4xe^{-2x} + \dfrac{2}{e}$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables
$\forall\, x \in \mathbb{R},\, g''(x) = f''(x) = -4e^{-2x} - 4x(-2e^{-2x}) = 4e^{-2x}(-1+2x)$

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\, g'(x) = f'(x) + \dfrac{2}{e} = -4xe^{-2x} + \dfrac{2}{e}}$

$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\, g''(x) = f''(x) = 4e^{-2x}(-1+2x)}$

b) <u>Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.</u>

$\forall\, x \in \mathbb{R},\, g''(x) = f''(x) = 4e^{-2x}(-1+2x)$
$\forall\, x \in \mathbb{R},\, 4e^{-2x} > 0$ donc $g''(x)$ est du signe $2x-1$

signe de $g''(x)$: $-$ $\overset{0}{\underset{1/2}{|}}$ $+$

c) <u>En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.</u>

$\forall\, x \leq \dfrac{1}{2}$, $g''(x) \leq 0$ donc g' est décroissante

$\forall\, x \geq \dfrac{1}{2}$, $g''(x) \geq 0$ donc g' est croissante

d) <u>En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.</u>

on déduit des questions précédentes le tableau de variation de g'

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{2}{e} = -\dfrac{2}{e} + \dfrac{2}{e} = 0$ $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ a été calculé à la question B1

<u>Conclusion</u> :
Le minimum de g' est 0 donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\, g'(x) \geq 0$ et par suite g est croissante

e) <u>Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T ?</u>

Établissons le tableau de variation de g

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$

$g(x) = f(x) - y_T = f(x) + \dfrac{2}{e}x - \dfrac{3}{e}$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{2}{e}x - \frac{3}{e}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e}x = -\infty \text{ car } \frac{2}{e} > 0$$

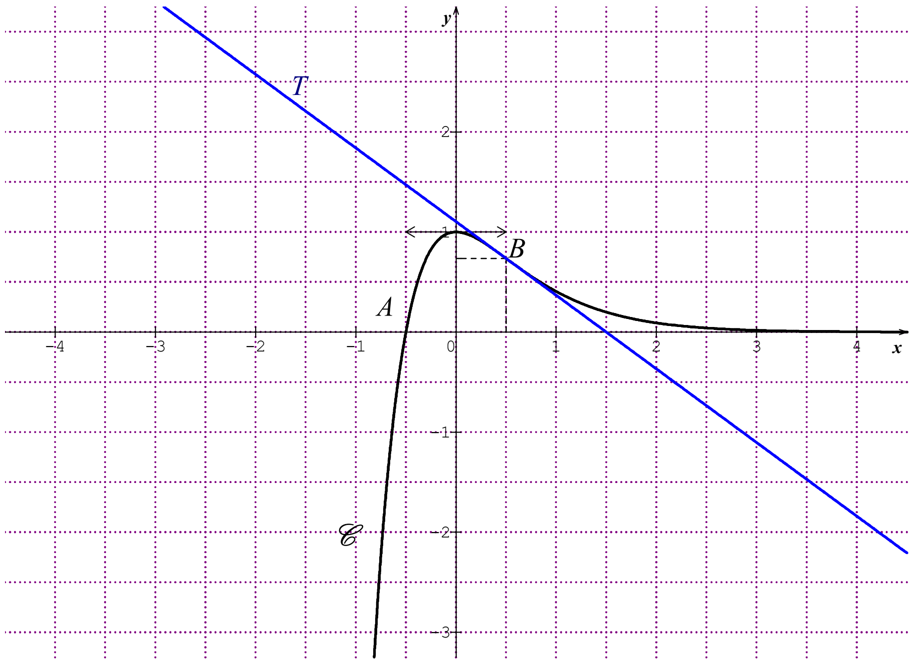
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{e}x - \frac{3}{e}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e}x = +\infty \text{ car } \frac{2}{e} > 0$$

de plus T est tangente à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse $\frac{1}{2}$ donc B est le point de contact entre $\mathscr{C}$ et T et par suite $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

D'après le tableau de variation de g on en déduit :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$g(x) = f(x) - y_T$	$-$	0	$+$
position	$\mathscr{C}$ est en dessous de T	$\mathscr{C}$ coupe T en B	$\mathscr{C}$ est au-dessus de T

3- Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.



Partie C : calculs d'aire et de volume

1- Soit λ un réel strictement positif.
On note $\mathscr{A}(\lambda)$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \lambda$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

$\forall \lambda > 0$, $f(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{1}{2} ; \lambda\right]$ d'après la question 1a signe de $f(x)$

donc l'aire en ua du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \lambda$ est donnée par $\mathscr{A}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x+1)e^{-2x}\mathrm{d}x$

f est continue sur $\left[-\frac{1}{2} ; \lambda\right]$ car dérivable donc admet des primitives .

On pose :

$u(x) = 2x+1 \qquad u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{-2x} \qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2} ; \lambda\right]$

La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2x+1}{2}e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} -\frac{2}{2}e^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2\lambda+1}{2}e^{-2\lambda} - (0e^{-1}) + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}$$

$$= -\frac{2\lambda+1}{2}e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}e = (-\lambda-1)e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}e$$

<u>Conclusion</u> : pour tout réel $\lambda > 0$: $\mathscr{A}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = (-\lambda-1)e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}e$ ua

b) <u>Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$</u>

pour tout réel $\lambda > 0$: $\mathscr{A}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x = (-\lambda-1)e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} = -\frac{\lambda}{(e^{\lambda})^2} - e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{(e^{\lambda})^2} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = \frac{1}{2}$

2- a) On considère la fonction H définies sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)e^{-4x}$.

<u>Calculer $H'(x)$ et exprimer $H'(x)$ en fonction de $f(x)$</u>

$H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)e^{-4x}$

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = \left(-2x - \frac{3}{2}\right)e^{-4x} - 4\left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)e^{-4x}$$

$$= \left(-2x - \frac{3}{2} + 4x^2 + 6x + \frac{5}{2}\right)e^{-4x}$$

$$= (4x^2+4x+1)e^{-4x}$$

<u>Conclusion</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = (4x^2+4x+1)e^{-4x} = ((2x+1)e^{-2x})^2 = (f(x))^2$

b) On considère le domaine E limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$

On note $\mathscr{V}$ le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses. On rappelle que $\mathscr{V}$, en unités de volume, est exprimé par $\mathscr{V} = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x))^2\mathrm{d}x$

Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{V}$ en unités de volume .

$$\mathscr{V} = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(f(x))^2\mathrm{d}x = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}H'(x)\mathrm{d}x \text{ car } H'(x) = (f(x))^2$$

$$= \pi\Big[H(x)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pi\left(H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)e^{-2} = \left(-1 - \frac{5}{8}\right)e^{-2} = -\frac{13}{8}e^{-2}$$

$$\text{et } H\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)e^{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right)e^{2} = -\frac{1}{8}e^{2}$$

Conclusion : $\mathscr{V} = \pi\left(-\frac{13}{8}e^{-2} + \frac{1}{8}e^{2}\right) = \frac{\pi}{8}\left(e^{2} - 13e^{-2}\right)$

Exercice 2:

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

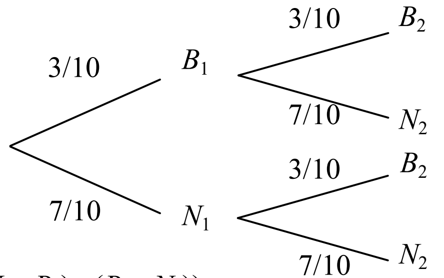
- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1- Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p = 0,42$.

On notera dans la suite de l'exercice les évènements suivants:
B_k :" la boule blanche est extraite au k-ième tirage"
N_k :" la boule noire est extraite au k-ième tirage"
Établissons un arbre pondéré de la situation



$$p = P((N_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap N_2))$$

$$= P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2) \quad \text{car} \quad (N_1 \cap B_2) \cap (B_1 \cap N_2) = \varnothing$$

$$= P(N_1)P(B_2) + P(B_1)P(N_2) \quad \text{car les tirages sont indépendants (remise)}$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{42}{100} = 0,42$$

Conclusion : $\boldsymbol{p = 0,42}$

2- Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a) Donner la loi de X.

L'épreuve consiste à tirer deux boules avec remise dans l'urne . Elle a deux issues :

- le succès :"la partie est gagnée" de probabilité $p = 0{,}42$
- l'échec : l'événement contraire de probabilité $1 - 0{,}42 = 0{,}58$

L'expérience se répète n fois de **manière identique et indépendante** car il y a remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n expériences.

Conclusion :

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ $(n;\ 0{,}42)$
$X(\Omega) = [\![0,\ n]\!]$
$\forall\, k \in [\![0;\ n]\!]$, $P(X{=}k) = \binom{n}{k}(042)^k(0{,}58)^{n-k}$

b) Exprimer p_n en fonction de n

$$p_n = P(X{\geq}1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0{,}42)^0(0{,}58)^n = 1 - (0{,}58)^n$$

Conclusion : $p_n = 1 - (0{,}58)^n$

c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % par le calcul et par Python.

on donne $\dfrac{\ln(10)}{\ln(0{,}58)} \approx -4{,}22$

- **Par le calcul:**

$p_n \geq 0{,}99$
$1 - (0{,}58)^n \geq 0{,}99$
$(0{,}58)^n \leq 0{,}01$
$n\ln(0{,}58) \leq \ln(10^{-2})$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$n \geq \dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln(0{,}58)}$ car $\ln(0{,}58) < 0$ $\quad (0 < 0{,}58 < 1)$
$n \geq -2\dfrac{\ln(10)}{\ln(0{,}58)}$ or $\dfrac{\ln(10)}{\ln(0{,}58)} \approx -4{,}22$ d'où $-2\dfrac{\ln(10)}{\ln(0{,}58)} \approx 8{,}44$

Conclusion : le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % est 9

- **Par Python**

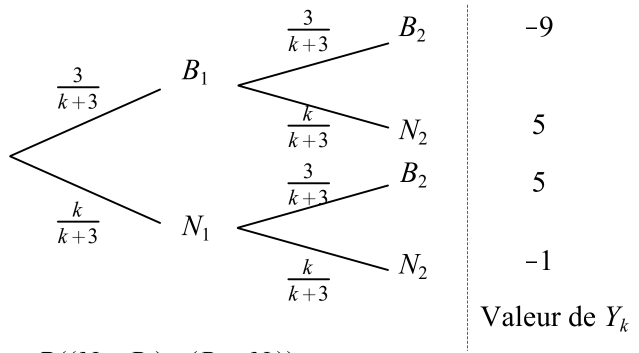
```
n=1
p=0.42  # p_0=1-(0,58)**0=1
while p <= 0.99 :
    n=n+1
    p=1-(0.58)**n
print(n)
```

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1- a) Justifier l'égalité : $P(Y_k=5)=\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

Cette fois il y a k boules noires et 3 boules blanches soit $(k+3)$ boules dans l'urne



$$\begin{aligned}
P(Y_k=5) &= P((N_1\cap B_2)\cup(B_1\cap N_2))\\
&= P(N_1\cap B_2)+P(B_1\cap N_2) \text{ car } (N_1\cap B_2)\cap(B_1\cap N_2)=\varnothing\\
&= P(N_1)P(B_2)+P(B_1)P(N_2) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)}\\
&= \frac{3}{k+3}\times\frac{k}{k+3}+\frac{k}{k+3}\times\frac{3}{k+3}\\
&= \frac{3k}{(k+3)^2}+\frac{3k}{(3+k)^2}\\
&= \frac{6k}{(k+3)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{P(Y_k=5)=\dfrac{6k}{(k+3)^2}}$

b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

$Y_K(\Omega)=\{-9,-1,5\}$

$$\begin{aligned}
P(Y_k=-9) &= P(B_1\cap B_2)\\
&= P(B_1)P(B_2) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)}\\
&= \frac{3}{k+3}\times\frac{3}{k+3}=\frac{9}{(k+3)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y_k=-1) &= P(N_1\cap N_2)\\
&= P(N_1)P(N_2) \text{ car les tirages sont indépendants (remise)}\\
&= \frac{k}{k+3}\times\frac{k}{k+3}=\frac{k^2}{(k+3)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

y_i	-9	-1	5	total
p_i	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2+6k+9}{(k+3)^2}=\dfrac{k^2+6k+9}{k^2+6k+9}=1$
y_ip_i	$\dfrac{-81}{(k+3)^2}$	$-\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{30k}{(k+3)^2}$	$\dfrac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}$

2- Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Le jeu est favorable au jour si $E(Y_k)>0$

$$E(Y_k)=\sum y_ip_i=\frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}$$

$\forall\ k\geq 2$, $(k+3)^2>0$ donc étudions le signe de $-k^2+30k-81$

On remarque que 3 est racine évidente car $-9+90-81=0$

d'où $-k^2+30k-81=(k-3)(-k+27)$

signe de $-k^2+30k-81$: $-$ $\underset{3}{0}$ $+$ $\underset{27}{0}$ $-$

Conclusion :

Le jeu est favorable au joueur si $k\in\ ]3, 27[$

Remarque : pour ceux qui ont fait delta

$\Delta\ =(30)^2-4(-1)(-81)=900-324=576=24^2$