LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC1

FEUILLE D'EXERCICES N°23

INÉGALITÉS ET INTÉGRALES

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

1- Déterminer Df

2- Étudier le sens de variations de f

3- Dresser le tableau de variations de f. On n'oubliera pas les limites

4- Montrer que $\forall\ k\geq 2,\ \ f(k+1)\leq\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t\leq f(k)$

5- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}f(k+1)\ \leq\int_2^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\ \leq\sum_{k=2}^{n}f(k)$

6- En déduire que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}f(k)\ \leq\int_2^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\ \leq\sum_{k=2}^{n}f(k)$

Exercice 2 :

Soit la fonctions f définies par : $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ et $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

1- Déterminer Df

2- Quel est le signe de I ?

3- Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0; 1], $f(x)=-1+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}$

4- Calculer la valeur exacte de I.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]1\ ;+\infty[$ par $f(x)=x+\ln(x^2-1)$

1- Déterminer Df

Dans la suite de l'exercice on prendra $Df=]1\ ;+\infty[$

2- Déterminer le sens de variations de la fonction f.

3- Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.

4- Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution que l'on notera $\alpha\in]1\ ;+\infty[$

5- Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $f(x)\geq x$.

6- Soit h la fonction définie sur $]1\ ;+\infty[$ par $h(x)=2x-f(x)$.
À partir du sens de variation de h, démontrer que h est positive.

7- Déduire des questions précédentes que, pour tout x de l'intervalle $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[\ \ x\leq f(x)\leq 2x$

8- Démontrer que $1\leq\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}f(x)\mathrm{d}x\leq 2$

On admet que $h(\sqrt{2}+1)\approx 0{,}84$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $\forall\ x \in [1, +\infty[,\ f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

On ne cherchera pas à déterminer explicitent $f(x)$

1- Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1,\ x]$

2- Montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$.

3- En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 5 :

Dans cet exercice on se propose d'encadrer l'intégrale : $K = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

1- Dresser le tableau des variations des fonctions g et h définies sur $[0;\ 1]$ par $g(x) = e^{-x} + x - 1$ et $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

2- En déduire que $\forall\ x \in [0;\ 1],\ 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

3- En déduire de **2**. un encadrement de e^{-x^2} pour x élément de $[0;\ 1]$

4- Montrer que $\forall\ x \in [0;\ 1],\ 1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$

5- $\forall\ x \in [0;\ 1],\ \frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

6- Calculer $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x}\,\mathrm{d}x$

7- En déduire que $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln(2)}{2}$