

CORRECTION DU TEST N°22

Exercice 1 :

Compléter le tableau suivant où F est une primitive de f en n'oubliant pas les conditions sur a et a voir cours

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 e^{-3x} dx$$

$x \mapsto e^{-3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues donc admet des primitives

$$I_1 = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} (e^{-3} - 1)$$

Conclusion : $I_1 = -\frac{1}{3} (e^{-3} - 1)$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^2 + x + 3) dx$$

$x \mapsto x^2 + x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1, 1]$ comme polynôme donc admet des primitives

$$I_2 = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 3 \right) = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$$

Conclusion : $I_2 = \frac{20}{3}$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ existe $\Leftrightarrow x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ donc $D = \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, 3]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ on reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2+1$ et $u' = 2x$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln |x^2+1| \right]_1^3 = \frac{1}{2} (\ln(10) - \ln(2)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln(5) = \ln\sqrt{5}$$

Conclusion : $I_3 = \ln\sqrt{5}$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ existe $\Leftrightarrow t^2+1 > 0 \Leftrightarrow t^2 > -1$ toujours vraie donc $D = \mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul donc admet des primitives

$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ on reconnaît $u'u^a$ avec $u = t^2+1$ et $u' = 2t$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^1 2t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \left[\sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Conclusion : $I_4 = \sqrt{2} - 1$

$$I_5 = \int_1^2 2y \ln(y) dy$$

$y \mapsto 2y \ln(y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1, 2]$ comme produit de fonction continue donc admet des primitives

On pose

$$u(y) = \ln(y) \quad u'(y) = \frac{1}{y}$$

$$v'(y) = 2y \quad v(y) = y^2$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I_5 &= \left[y^2 \ln(y) \right]_1^2 - \int_1^2 y dy \text{ car } \frac{1}{y} \times y^2 = \frac{y^2}{y} = y \\ &= 4 \ln(2) - 1 \ln(1) - \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 4 \ln(2) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 4 \ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $I_5 = 4 \ln(2) - \frac{3}{2}$