

FEUILLE D'EXERCICES N°24
MATRICES (1)

Exercice 1 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $A + B$; $A - B$; $3A$; $4B$; $A - 2B$; AB ; BA

Exercice 2 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer $2A - 3B$.

Exercice 3 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $4(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.

Exercice 4 :

Effectuer les opérations suivantes lorsque cela est possible

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

Calculer les produits suivants :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer quand cela est possible :

$C + E$, AB , BA , $2D - 3F$, DF , tAD , $AB + DF$, ${}^t(DF)$, ${}^tF^tD$, $EF - 2A$ et $AB + AE$

réponse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C + E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$2D - 3F = 2 \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -19 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DF = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$$

$${}^tAD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AB + DF = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 16 & 31 \end{pmatrix}$$

$${}^t(DF) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

$${}^tF^tD = {}^t(DF) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

$EF - 2A$ = impossible car le produit $E \times F$ est impossible une matrice (3,3) ne peut se multiplier par une matrice (2,2)

$AB + AE = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 4 & 16 \\ 16 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ cette addition est impossible car les 2 matrices n'ont pas le même nombre de colonnes.

Exercice 7 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

1- $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

2- $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3- $AX = 3X$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 8 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1- Calculer QP et PQ

2- Calculer PDQ en déduire que $D = QAP$

3- On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nQ$. et que $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$. Calculer A^n