LYCEE JEAN PERRIN **2024-2025**

EC1

FEUILLE D'EXERCICES N°25

MATRICES (2)

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices suivantes :

1- $A-2I_3$, $(A-I_3)(A-2I_3)$

2- AI_3 , I_3A que peut-on en déduire?

Exercice 2 :

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- Calculer $A(A-I_3)(A-2I_3)$

2- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Résoudre les systèmes $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 2X$

Exercice 3 :

On donne $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

1- Calculer $A^2 - 3A$

2- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Résoudre les systèmes $AX = X$ et $AX = 2X$

Exercice 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1- Calculer A^2 et A^3.

2- En déduire A^n pour tout entier $n \geq 3$.

Exercice 5 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- Donner l'expression de I_2

2- Calculer et comparer AI_2 et I_2A

3- Calculer et comparer $A^2+2AB+B^2$ et $(A+B)^2$

4- Donner la formule du binôme de Newton avec les conditions d'utilisations

Exercice 6 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + I_3$.

1- Calculer A^2 ,A^3 puis A^n pour $n \geq 3$.

2- Calculer B^n pour $n \geq 2$.

3- La formule obtenue à la question 2 est-elle toujours vraie si $n = 0$ et si $n = 1$.

Exercice 7 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1- Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$.

2- Calculer B^2, B^3 et pour tout entier $n \geq 3$, B^n.

3- Calculer pour tout entier n , A^n.

Exercice 8 :

Soit D la matrice définie par $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et T la matrice définie par $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $N = T - D$

1- Déterminer N, N^2 et N^k pour $k \geq 2$

2- Déterminer T^n pour tout entier n

On admet que si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

Exercice 9 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Résoudre les systèmes $AX = Y$ dans les différents cas suivants:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$