

CHAPITRE 17: LES OPERATIONS SUR LES MATRICES (1)

I- GÉNÉRALITÉS

1- DÉFINITIONS

Une matrice à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

exemples :

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice à lignes et colonnes

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice à lignes et colonnes

Remarques : L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Si $p = n$, la matrice est dite carrée d'ordre n et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ (en Python : `np.array([ [1,-1] , [0,3] ] )`)

- Si $p = 1$, la matrice est dite matrice colonne et on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes.

exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (en Python :)

- Si $n = 1$, la matrice est dite matrice ligne et on note $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes.

exemple : $(1 \ 2 \ 3)$ (en Python :)

- Si tous les coefficients de la matrice sont nuls, on dit que la matrice est nulle et on la note $0_{n,p}$ ou 0_n dans le cas des matrices carrées.

exemples :

$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (en Python : `np.zeros( (3, 3) )`)

$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (en Python :)

2- ÉGALITÉ DE DEUX MATRICES

Deux matrices sont égales si elles ont le même nombre de lignes **et** le même nombre de colonnes **et** les mêmes coefficients.

exemple : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

II- OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

1- ADDITIONS

On considère deux matrices A et B de même taille i.e même nombre de lignes et même nombre de colonnes.

La somme de A et B est la matrice de taille (n,p) notée $A+B$ obtenue en additionnant deux à deux les termes situés à la même place dans A et dans B .

exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$



Par contre, on ne peut pas additionner $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ car elles n'ont pas la même taille.

Remarque : on définit de même la soustraction.

exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Propriétés de l'addition et de la soustraction

Ce sont les mêmes que pour les nombres

Soient A, B, C trois matrices alors :

$$A + B = B + A$$

$$A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

2- MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE RÉEL

Soit A une matrice de taille (n,p) et k un nombre réel.

Le produit de A par k , noté kA est la matrice de taille (n,p) obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k .

exemple :

$$3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

Propriétés de la multiplication par un réel

Ce sont les mêmes que pour les nombres.

Soient A une matrice et k_1, k_2 deux réels alors :

$$0A = 0_{n,p}$$

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$

3- MULTIPLICATIONS DE DEUX MATRICES

Pour pouvoir effectuer le produit de deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égale au nombre de lignes de la deuxième.

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ne pourra se multiplier qu'avec une matrice à 3 lignes.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A a deux colonnes et B deux lignes, le produit est donc possible.

Méthode pratique pour effectuer le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 1:

Soit A une matrice de taille (n,p) et B une matrice de taille (p,q) alors la matrice produit $A \times B$ sera une matrice (n,q) .



Le produit AB peut exister et BA peut ne pas exister.

exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } AB =$$

alors que $B \times A$ n'existe pas car B a trois colonnes et A une seule ligne.

On dit que deux matrices A et B commutent si $A * B = B * A$.

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif en général !!!

Propriétés de la multiplication

Sous réserve que les multiplications soient possibles .

Soient A, B, C trois matrices et on note 0 la matrice nulle.

$$0 \times A = A \times 0 = 0$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Si $A = B$, alors :

$$C \times A = C \times B \text{ (multiplication à gauche)}$$

$$\text{et } A \times C = B \times C \text{ (multiplication à droite)}$$



La division par une matrice n'existe pas !!!



Ce n'est pas parce que $A * B = 0$ que $A = 0$ ou $B = 0$!

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dans notre exemple $A B = 0_2$ et $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$

Et Python dans tout ça ?

Rien de plus simple :

coder en Python les matrices A et B de l'exemple précédent

pour ajouter deux matrices, on utilise



pour soustraire deux matrices, on utilise

pour multiplier une matrice par un nombre, on utilise

pour multiplier deux matrices , on utilise

les multiplications $*$ ou $**$ font des opérations terme à terme qui n'ont aucun sens mathématiques

4- TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE

Transposer une matrice revient à transformer les lignes en colonnes et inversement.

Si on a une matrice A , sa transposée est notée tA .

En Python, la transposée de A est codée `np.transpose(A)`

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$

Propriétés de la transposée

Soient A, B deux matrices et k un nombre réel

$${}^t({}^tA) = A$$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(k \times A) = k \times {}^tA$$

$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \quad \text{sous réserve que les multiplications soient possibles}$$