Chapitre n° 3 : Polynômes

1 Vocabulaire et propriétés

Définition 1.1

On appelle fonction polynôme (ou fonction polynomiale, ou parfois simplement polynôme) toute fonction P de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, appelés coefficients de P.

Définition 1.2

Soit P une fonction polynôme définie par $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Alors :

- n est appelé le degré de P
- a_n est appelé le coefficient dominant de P
- a_0 est appelé le coefficient constant de P

Exemple 1. Les expressions suivantes définissent-elles des polynômes ? Si oui, donner le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant.

$$P_1(x) = 5x^2 - 3x - 1 \qquad P_2(x) = 3x + \frac{x^4}{3} \qquad P_3(x) = 2$$
$$P_4(x) = \sqrt{x} - 5x \qquad P_5(x) = 1 + x^{-1} + 3x^2 \qquad P_6(x) = 2(x-1)(x+3)$$

Remarque 1. On dit que la fonction constante égale à 0 est une fonction polynôme, de degré $-\infty$.

Proposition 1.1

- La somme de deux polynômes est encore un polynôme.
- Le produit de deux polynômes P, Q est encore un polynôme et, si les polynômes sont non nuls, on a :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Exemple 2. Soit $P(x) = -3 + 2x - x^2$ et $Q(x) = 3x + x^2$. Déterminer les polynômes $P + Q$ et PQ

Remarque 2. Un quotient de deux polynômes n'est pas, en général, un polynôme. On dit que c'est une **fraction rationnelle**. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+2x-3x^2}{x+x^5}$ est une fraction rationnelle.

Proposition 1.2

Deux polynômes sont égaux s'ils ont même degré et mêmes coefficients.

Méthode 1.1

Ceci permet de **trouver des coefficients** inconnus dans des égalités de polynômes.
En effet, si deux polynômes sont égaux, alors dans leurs formes développées, on peut identifier les coefficients.

Exemple 3. Trouver des réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)(x^2+ax+b) = x^3+2x^2-16$.

Définition 1.3: Racine

Soit P une fonction polynôme et α un réel. On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Remarque 3. Ainsi, les racines d'un polynôme P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple 4. Soit $P(x) = x^3 - 2x + 1$. Est-ce que 2 est une racine de P ? Et 1 ?

2 Polynôme de degré 1

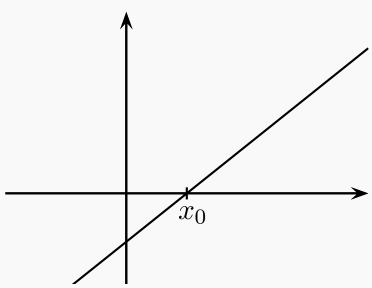
Proposition 2.1: rappel

Une fonction polynôme de degré 1 est de la forme $P(x) = ax + b$, où $a \neq 0$.

La représentation graphique de cette fonction est une droite. a est alors appelé le coefficient directeur de la droite et b est appelé l'ordonnée à l'origine.

<u>Cas $a > 0$</u>

La droite est croissante.



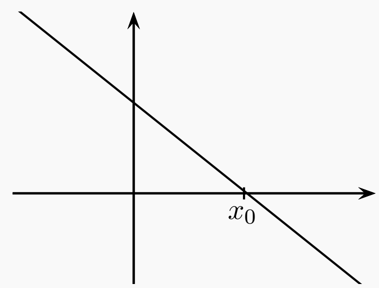
$P(x)$ a une unique racine x_0 (qui vaut $-\frac{b}{a}$).

Le signe de $P(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

<u>Cas $a < 0$</u>

La droite est décroissante.



$P(x)$ a une unique racine x_0 (qui vaut $-\frac{b}{a}$).

Le signe de $P(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	

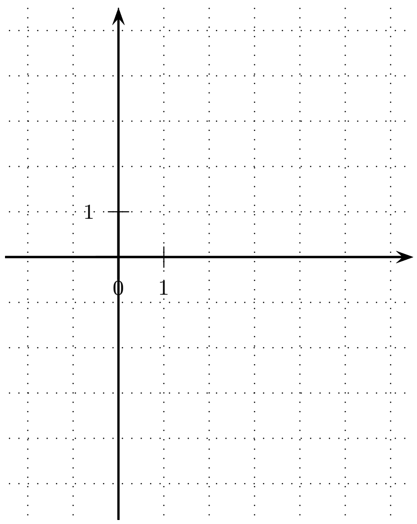
Méthode 2.1: Résumé

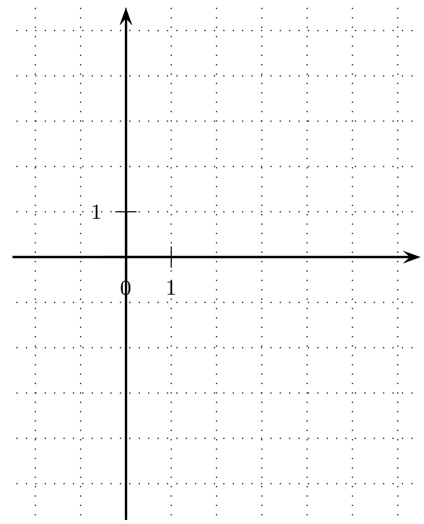
Le signe de $\boxed{ax+b}$ s'étudie grâce au tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe opposé de a	0	signe de a	

Exemple 5. Étudier le signe des polynômes suivants puis tracer leur courbe.

- $P(x) = 2x - 5$
- $Q(x) = 2 - 3x$





3 Polynôme de degré 2

Définition 3.1

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) une fonction polynôme de degré 2. On appelle discriminant de P le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 6. Soit $P(x) = 2x^2 + x - 3$. Déterminer les coefficients a, b et c puis calculer le discriminant Δ.

Exemple 7. Soit $P(x) = -x^2 - 3x + m$. Déterminer les coefficients a, b et c puis calculer le discriminant Δ.

Proposition 3.1: cas $\Delta > 0$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.
Si $\Delta > 0$ alors :
P a exactement deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

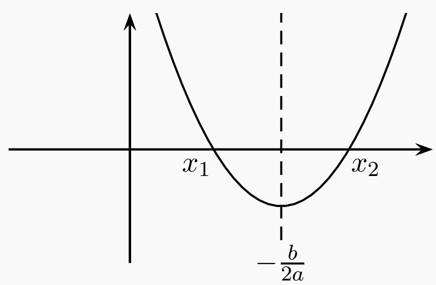
P se factorise sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines :

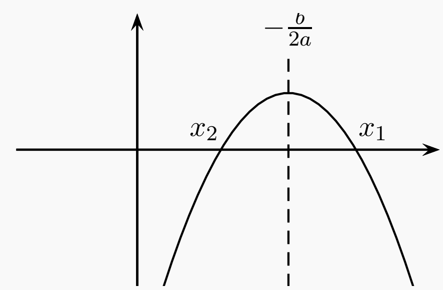
Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



Proposition 3.2: cas $\Delta = 0$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.
Si $\Delta = 0$ alors :
P a une unique racine :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

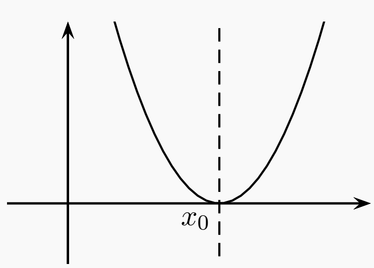
P se factorise sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

$P(x)$ est toujours du signe de a :

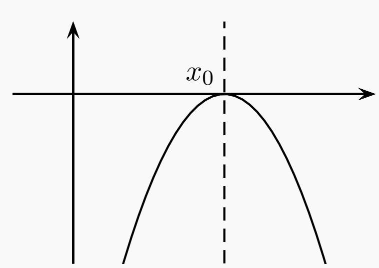
Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	



Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	

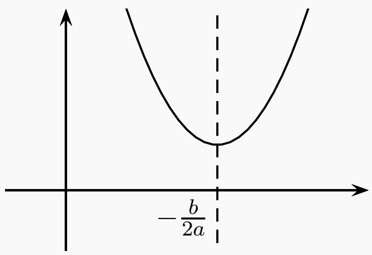


Proposition 3.3: cas $\Delta < 0$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.
Si $\Delta < 0$ alors :
P n'a pas de racine et il ne peut pas être factorisé par un polynôme de degré 1.
$P(x)$ est toujours du signe de a :

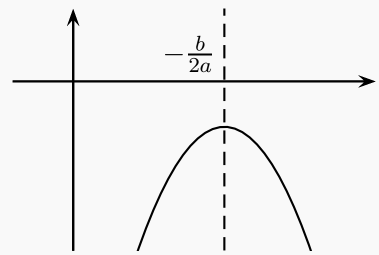
Si $a > 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	$+$



Si $a < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	$-$



Méthode 3.1

On peut se souvenir du tableau de signe d'un polynôme du second degré avec la propriété suivante :

$ax^2 + bx + c$ **est du signe de** a **partout sauf entre les racines, si il y en a.**

Remarque 4. La courbe représentative de la fonction $P(x) = a^2 + bx + c$ est appelée une parabole.
Lorsque $a > 0$, la parabole est « tournée vers le haut ». Lorsque $a < 0$, elle est « tournée vers le bas ».
Cette courbe a un axe de symétrie : la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$. Le sommet de la parabole a donc pour coordonnées $(-\frac{b}{2a}, P(-\frac{b}{2a}))$.

Exemple 8. Soit $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

1. Déterminer le signe de $P(x)$ selon la valeur de x.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Déterminer la valeur minimale prise par $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre une inéquation de degré 2, il faudra tout regrouper d'un même côté de l'inéquation pour se ramener à une étude de signe et exploiter les résultats précédents (voir exemple suivant).

Exemple 9. Résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x > -2$.

Exemple 10. Dresser le tableau de signe de la fonction $f(x) = (-2x + 6)(x^2 - x - 2)$.

4 Factorisation et étude des polynômes de degré $\geqslant 3$

Exemple de factorisation par division euclidienne : Factoriser $P(x) = 2x^3 - 3x + 10$ par $(x+2)$.

Théorème 4.1

Si α est une racine d'un polynôme P alors P est factorisable par $(x-\alpha)$. Autrement dit P s'écrit sous la forme :

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

où Q est un polynôme.
De plus, si $\deg P = n$ alors $\deg Q = n - 1$.

Remarque 5. Pour un polynôme P de degré supérieur $\geqslant 3$, il n'y a pas de formule générale. Nous chercherons à factoriser le polynôme en utilisant le théorème précédent, selon la méthode suivante :

Méthode 4.1

- On cherche une racine « évidente » de P parmi des valeurs simples : 0, 1, -1, 2, -2, ... Notons α la racine trouvée.
- On factorise $P(x)$ par $(x - \alpha)$: avec la division euclidienne, on trouve Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
- On recommence ensuite avec Q. Et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un polynôme de degré 2.
- La factorisation de P permet alors de construire le tableau de signes de P et les racines de chaque facteur forment l'ensemble des racines de P.

Remarque 6. À la deuxième étape, on peut utiliser une division euclidienne, ou bien utiliser l'identification des coefficients.

Exemple 11. Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$. Déterminer les racines de P et étudier son signe.

Remarque 7. Si P est de degré 4, on procédera donc ainsi :

- On trouvera une racine évidente α de P et on factorisera P sous la forme $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ (Q de degré 3).
- On trouvera une racine évidente β de Q et on factorisera Q sous la forme $Q(x) = (x-\beta)R(x)$ (R de degré 2).
- On conclura en utilisant alors $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)R(x)$.

Méthode 4.2: Une astuce pratique :

Lorsqu'il n'y a que des puissances paires dans le polynôme, on peut poser $X = x^2$ et réécrire l'équation avec X pour se ramener à une équation de degré 2.

Exemple 12. Résoudre l'équation $x^4 + x^2 - 2 = 0$.