

ECT1 - CONCOURS BLANC N°1

Durée: 4 heures

Documents et calculatrices interdits.

Les résultats doivent être mis en évidence.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Le sujet contient 3 pages.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes (on précisera les ensemble de définitions).

a) $1 - x = 0$

d) $3 \ln(2x) = -12$

b) $\frac{1}{3}x - 4 = 2$

e) $-2(x + 2) + 1 = 1 + 4x$

c) $5e^{2x} = 15$

f) $e^{3x^2+4} = e^x$

Exercice 2

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f_1(x) = 8x + e^{3x-7}$

b) $f_2(x) = \sqrt{-2x+8}$

c) $f_3(x) = \frac{3x}{2x^2 - 18}$

Indication : $8 \times 18 = 144 = 12^2$.

Exercice 3

1. Développer les expressions suivants :

a) $A = 5(x - 1) - (2x + 3)^2$

b) $B = (x + 2)^3$

2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

a) $C = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{72}}\right)$

b) $D = \ln(12) + 4 \ln\left(\frac{3}{16}\right)$

3. Mettre sous la forme d'une seule fraction (la plus réduite possible) les expressions suivantes :

a) $E = \frac{1}{5} - \frac{2}{x^2}$

b) $F = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes.

a) $-2x^2 + x = 2$

b) $\frac{4x^2 - 4x + 1}{x + 2} = 0$

Exercice 5

Construire le tableau de signe des fonctions suivantes.

a) $f_1(x) = -3x - 12$

b) $f_2(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $f_3(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 1}$

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 - 5x - 2 > 0$

b) $\frac{5 - 2x}{3x - 18} \leq 0$

c) $x - 1 > -\frac{2}{x + 2}$

Exercice 7

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que :

- 40% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'événement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'événement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».

On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer $P(E \cap V)$.
3. Montrer que $P(V) = 0,38$.
4. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés différentes. Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

Exercice 8

On considère la fonction polynôme P définie sur \mathbb{R} par : $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

1. Montrer que 2 est une racine de P .
2. Montrer que $f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x^2 - 3)$.
3. En déduire la résolution de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 9

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour. Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule *Simple* (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule *Confort* (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60% des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20% ne souscrivent aucune formule d'entretien.
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45% des locataires de studio et par 55% des locataires de deux-pièces.
- 18% des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard. On note :

- S l'événement « le résident a loué un studio »,
- A l'événement « le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »,
- B l'événement « le résident a souscrit la formule Simple »,
- C l'événement « le résident a souscrit la formule Confort ».

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes:

$$P(S), \quad P(\bar{S}), \quad P_S(A), \quad P_{\bar{S}}(B), \quad P_S(C), \quad P_{\bar{S}}(B) \quad \text{et} \quad P(A).$$

2. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisissent la formule Simple. Justifier cette affirmation par le calcul.
3. On pose $x = P_{\bar{S}}(A)$.

- (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer soigneusement que

$$0.18 = 0.12 + 0.4x.$$

- (b) En déduire la valeur de $P_{\bar{S}}(A)$.

4. Calculer la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces sachant qu'il n'a souscrit aucune formule d'entretien.