Chapitre n° 4 : Suites numériques

1 Suites réelles

1.1 Définition

Définition 1.1

Une suite réelle u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
L'image de l'entier n est notée u_n et elle est appelée le terme de rang n de la suite u.
La suite u est alors aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.

- Il faut comprendre que lorsqu'une fonction a pour ensemble de définition $\mathbb{N}$, nous préférons noter u_n plutôt que $u(n)$, mais cela représente exactement la même chose.
- Attention aux notations : $u_{n+1} \neq u_n + 1$! u_{n+1} est le terme de rang $n+1$, c'est-à-dire l'image de $n+1$ par la suite u : $u_{n+1} = u(n+1)$.
  u_{n+1} est donc le terme de la suite u qui vient après le terme u_n.
- Ne pas confondre la notation (u_n) qui représente la suite dans sa globalité et la notation u_n qui représente le terme de rang n.
- Une suite peut être définie non pas à partir de 0, mais à partir d'un certain rang n_0. Nous notons alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie à partir de 1, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est définie à partir de 2.

Interprétation graphique:

Principe 1.1

Dans la notion de suite, la variable est notée n. Il faut la voir comme une «case vide» dans laquelle on peut y mettre des nombre entier mais aussi des expression.

Exemple 1. Pour chacune des expressions suivantes, remplacer n par 0, par 1, par $n+1$, puis par n^2+5.

$$u_n = 7n = 1 \qquad v_n = 2^n - n \qquad w_{n+1} = 2w_n + \frac{3}{2}$$

1.2 Différentes manières de définir des suites

Suites

Explicite

$u_n = f(n)$

Exemples :

$u_n = 3n - 7$

$u_n = -0.1n^2 + n - 1$

Méthode

On remplace n par la valeur demandée, et on obtient directement la valeur du terme de la suite.

Par récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples :

$u_{n+1} = u_n + 8$

$u_{n+1} = -u_n^2 + 8$

Méthode

On ne peut calculer que les premiers termes de la suite. Il faut donc les calculer les uns après les autres. On va donc remplacer les valeurs de n par 0, puis par 1, puis par 2, etc.

Exemple

$u_n = 3n^2 - 5$

$\boxed{n = \mathbf{0}}$ $\quad u_{\mathbf{0}} = 3 \times \mathbf{0}^2 - 5 = -5$

$\boxed{n = \mathbf{5}}$ $\quad u_{\mathbf{5}} = 3 \times \mathbf{5}^2 - 5 = 70$

$\boxed{n = \mathbf{23}}$ $\quad u_{\mathbf{23}} = 3 \times \mathbf{23}^2 - 5 = 1582$

$\boxed{n = \mathbf{k+1}}$ $\quad u_{\mathbf{k+1}} = 3 \times (\mathbf{k+1})^2 - 5$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

$\boxed{n = \mathbf{0}}$

$$\begin{array}{rcl} u_{\mathbf{0}+1} & = & 3u_{\mathbf{0}} + 2 \\ u_1 & = & 3u_{\mathbf{0}} + 2 \\ u_1 & = & 3 \times 1 + 2 \\ u_1 & = & 5 \end{array}$$

$\boxed{n = \mathbf{1}}$

$$\begin{array}{rcl} u_{\mathbf{1}+1} & = & 3u_{\mathbf{1}} + 2 \\ u_2 & = & 3u_{\mathbf{1}} + 2 \\ u_2 & = & 3 \times 5 + 2 \\ u_2 & = & 17 \end{array}$$

$\boxed{n = \mathbf{2}}$

$$\begin{array}{rcl} u_{\mathbf{2}+1} & = & 3u_{\mathbf{2}} + 2 \\ u_3 & = & 3u_{\mathbf{2}} + 2 \\ u_3 & = & 3 \times 17 + 2 \\ u_3 & = & 53 \end{array}$$

2 Suites usuelles

Dans cette partie, les définitions sont énoncées pour des suites définies sur $\mathbb{N}$, mais on peut les adapter à des suites définies à partir d'un certain rang n_0.

2.1 Suites constantes

Définition 2.1

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$$

Proposition 2.1

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0$$

Méthode 2.1

Pour démontrer qu'une suite (U_n) est constante, on exprime, en fonction de n, $U_{n+1} - U_n$ et on prouve qu'on obtient 0.

Exemple 2. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2v_n - 3u_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Montrer que (w_n) est une suite constante et en déduire l'expression de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Suites arithmétiques

Définition 2.2

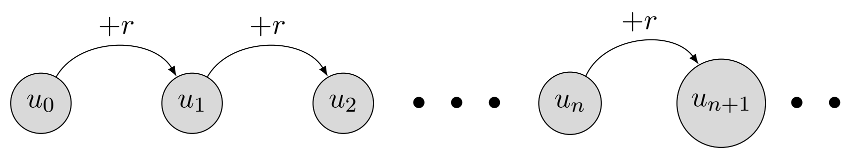
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe un réel r, indépendant de n, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.

- Ceci définit une suite par récurrence : pas très pratique...
- On peut se représenter une suite arithmétiques par :



- Une suite (u_n) est donc arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

- Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 3.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{3}{2}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + n$.

Proposition 2.2

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 + r \times n$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

Remarque 3.

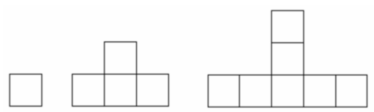
- Pour comprendre et retenir ces formules :

- Plus généralement, on a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$.
- Ces formules permettent donc d'exprimer u_n **en fonction de n (forme explicite)**.

Exemple 4.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{3}{2}$. Exprimer u_n en fonction de n puis donner u_{10}.

- On donne ci-dessous les trois premières figures d'une suite de figures. On note u_n le nombre de carrés sur la n-ième figure. Que vaut u_{100} ?



- On place un capital C_0 de 5000 € à 4.5% par an avec intérêts simples (chaque année, on reçoit le même intérêt). On note C_n le capital disponible au bout de n années. Donner C_n en fonction de n.

Remarque 4. Dans la pratique, on reconnaîtra une suite arithmétique à partir de la définition : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. On en déduira l'expression de u_n en fonction de n grâce à la proposition : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$.

2.3 Suites géométriques

Définition 2.3

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe un réel q, indépendant de n, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 5.

- Ceci définit une suite par récurrence : pas très pratique...
- On peut se représenter une suite géométrique par :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \quad \bullet\ \bullet\ \bullet \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \bullet\ \bullet$$

- Une suite (u_n) qui ne s'annule pas est donc géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

- Une suite géométrique est entièrement déterminée par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 5.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -u_n$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Proposition 2.3

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 q^n$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

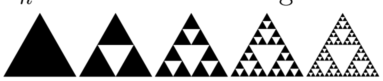
$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

Remarque 6. • Pour comprendre et retenir ces formules :

- Plus généralement, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p q^{n-p}$.
- Ces formules permettent donc d'exprimer u_n en fonction de n (forme explicite).

Exemple 6. • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

- On donne ci-dessous les cinq premières figures d'une suite de figures (appelées triangles de Sierpinski). On note u_n le nombre de triangles noirs sur la n-ième figure. Que vaut u_{10} ?



- On place un capital C_0 de 5000 € à 4.5% par an avec intérêts composés (chaque année, les intérêts s'ajoutent au capital pour le calcul des intérêts suivants). On note C_n le capital disponible au bout de n années. Donner C_n en fonction de n.

Remarque 7. Dans la pratique, on reconnaîtra une suite géométrique à partir de la définition : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$. On en déduira l'expression de u_n en fonction de n grâce à la proposition : $u_n = u_0 q^n$ ou $u_n = u_1 q^{n-1}$.

2.4 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.4

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux réels a et b, indépendants de n, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque 8.

- Ceci définit une suite par récurrence : pas très pratique...
- Une suite arithmético-géométrique est entièrement déterminée par la donnée de son premier terme et des réels a et b.

Exemple 7. La suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 1$ est arithmético-géométrique.

Méthode 2.2: Comment exprimer u_n en fonction de n pour une suite arithmético-géométrique ?

Contrairement aux autres suites usuelles, il n'y a pas de formule de cours. Mais nous avons la méthode suivante :

- Étape 1 : Trouver la solution x_0 de l'équation $x = ax + b$ (résolution d'une équation de degré 1).
- Étape 2 : Introduire la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - x_0$ puis vérifier que (v_n) est une suite géométrique.
- Étape 3 : Exprimer alors v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n.

Exemple 8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$.
Exprimer u_n en fonction de n.