Exercice 1
Dans chaque cas, dire si la suite est définie explicitement ou par récurrence, puis calculer u_4.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n - 2n^2$
2. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n - 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^2+1}$
4. $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} \times u_n$
5. $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - 1 + n$
6. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -3u_{n-1} + 4$

Exercice 2
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 - n + 2$.
Exprimer en fonction de n les termes u_{n-1} et u_{n+2}.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 1$.
Exprimer u_{n+2} en fonction de n et de u_n.

Exercice 4
Reconnaître les suites suivantes, puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

1. $u_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 + u_n$.
2. $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 10 + u_n$.
3. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{2}$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n$.
5. $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = -u_n$.
6. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
7. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$.
8. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 5$.
9. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2$. Vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 6
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (u_n) est-elle une suite arithmétique ? géométrique ?
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n^2$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
4. Donner alors l'expression de v_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 (extrait de ESC 2004)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Dans cette question, on examine une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   On pose pour tout entier naturel n, $v_n = n + u_n$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n.
   (b) En déduire que la suite (v_n) est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n uniquement.
   (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - n$.

Exercice 8
Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+3a_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n existe et $a_n > 0$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1}{a_n}$. Pourquoi est-ce possible?
3. Montrer que la suite (t_n) est arithmétique.
4. Exprimer alors t_n en fonction de n.
5. En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{array}\right.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1.
2. Exprimer alors v_n en fonction de u_n.
3. En déduire que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
4. Exprimer alors u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.

Exercice 10

Une mouche vole entre deux pièces notées A et B. À l'instant 0, elle est dans la pièce A. Puis, à chaque instant, elle décide de rester dans la même pièce ou de changer de pièce de la manière suivante :

- si à l'instant n elle se trouve dans la pièce A, alors à l'instant $n+1$ elle reste dans la pièce A avec probabilité $\frac{1}{5}$ ou elle change de pièce avec probabilité $\frac{4}{5}$;
- si à l'instant n elle se trouve dans la pièce B, alors à l'instant $n+1$ elle reste dans la pièce B avec probabilité $\frac{3}{5}$ ou elle change de pièce avec probabilité $\frac{2}{5}$.

On note A_n l'événement “la mouche se trouve dans la pièce A à l'instant n”.

1. Déterminer $P(A_0)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(A_{n+1})$ à l'aide de $P(A_n)$.
3. En déduire $P(A_n)$ en fonction de n.