Devoir Maison n°7

À rendre le 5 janvier

Exercice 1

On considère le polynôme P de degré 3 suivant :

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

et on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-6}{P(x)} = \frac{-6}{x^3 - x^2 - x - 2}$$

1. (a) Calculer $P(2)$.
   (b) Factoriser $P(x)$.
   (c) Construire alors le tableau de signe de $P(x)$.
2. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 2

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Chaque matin, Alice peut se rendre à son travail de deux manières différentes : en bus ou en métro.
En prenant le bus, elle arrive en retard avec probabilité $\dfrac{1}{5}$ alors qu'avec le métro, la probabilité qu'elle arrive en retard est $\dfrac{1}{10}$.
Alice, qui préfère tout de même voyager à l'extérieur, choisit d'aller travailler en bus avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.
On considère les évènements :

- B « Alice prend le bus »
- M « Alice prend le métro »
- R « Alice est en retard »

1. Donner sans calcul $P(B)$, $P_B(R)$ et $P_M(R)$.
2. Quelle est la probabilité qu'Alice prenne le métro ?
3. Montrer que la probabilité qu'Alice arrive en retard est $\dfrac{1}{6}$. On justifiera précisément.
4. Alice arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait choisit le métro ?

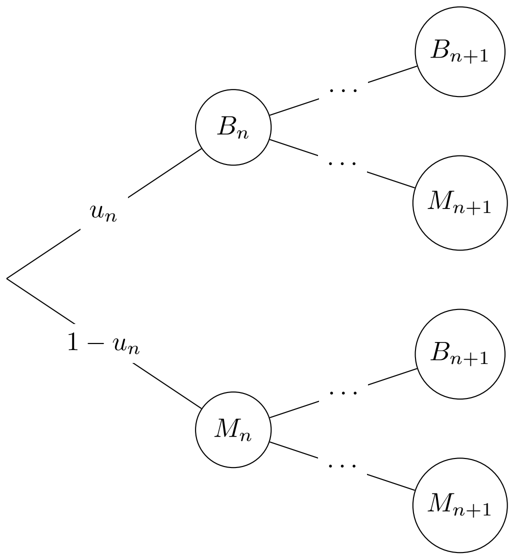
Partie II

Alex travaille au même endroit et prend les mêmes transports (le bus, qui le fait arriver en retard avec probabilité $\frac{1}{5}$, ou le métro). Mais lui procède ainsi :

- Le premier jour (jour 1), il prend le bus.
- Si le jour n il prend le métro, alors le jour $n+1$, il prend le métro ou le bus de manière équiprobable.
- Si le jour n il arrive en retard en prenant le bus, alors le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.

On considère les évènements suivants : B_n « Alex prend le bus le jour n » et M_n « Alex prend le métro le jour n ».
On note u_n la probabilité de B_n : $u_n = P(B_n)$.

1. Donner sans calcul u_1.
2. Que représente u_{n+1} en terme de probabilité.
3. Exprimer $P(M_n)$ en fonction de u_n.
4. Recopier l'arbre suivant et compléter les probabilités.



5. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que : $u_{n+1} = \frac{3}{10}u_n + \frac{1}{2}$.