DM n°7

Exo 1

① a] $P(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$

2 est une racine de P

b] On utilise la méthode de HORNER

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

$Q(x) = 1x^2 + 1x + 1 = x^2 + x + 1$

Ainsi $P(x)$ se factorise sous la forme :

$$P(x) = (x-2)(x^2+x+1)$$

c]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$ (m=1⊕)		$-$	0	$+$	
x^2+x+1 (a=1⊕)		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x^2 + x + 1 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ Pas de racine

② $f(x) = \dfrac{-6}{P(x)}$ $\quad$ f est définie ssi $P(x) \neq 0$

ssi $x \neq 2$ (unique racine de P)

Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

③ $f(0) = \dfrac{-6}{P(0)} = \dfrac{-6}{0^3 - 0^2 - 0 - 2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$ $\qquad$ $f(1) = \dfrac{-6}{1^3 - 1^2 - 1 - 2} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

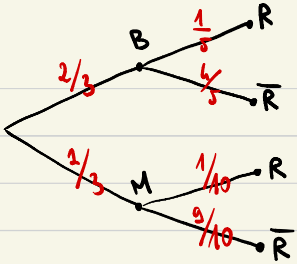
④ Pour résoudre $f(x) \geq 0$ on fait le tableau de signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
-6		$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	

Ainsi $f(x) \geq 0$ lorsque $x \in]-\infty ; 2[$.

Exo 2

Partie 1



① $P(B) = \frac{2}{3}$

$P_B(R) = \frac{1}{5}$ et $P_M(R) = \frac{1}{10}$

② $P(M) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ La probabilité qu'Alice prenne le métro est $\frac{1}{3}$.

③ Les événements $(B;M)$ forment un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(B \cap R) + P(M \cap R) \\ &= P(B) \times P_B(R) + P(M) \times P_M(R) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{2^{\times 2}}{15_{\times 2}} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} + \frac{1}{30} = \frac{\cancel{5}^{\,\cancel{5}\times 1}}{\cancel{30}_{\,\cancel{5}\times 6}} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

④ On cherche $P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{P(M) \times P_M(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\cancel{30}_{\,\cancel{6}\times 5}} \times \frac{\cancel{6}}{1} = \boxed{\frac{1}{5}}$

Partie II

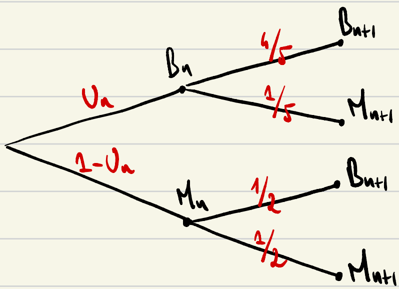
① $u_1 = P(B_1) = P(\text{"Alex prend le bus le jour 1"})$

$= 1$ d'après l'énoncé il prend le bus le jour 1.

② $U_{n+1} = P(M_{n+1})$ c'est donc la probabilité que Alex prenne le métro le jour $n+1$.

③ $P(M_n) = 1 - P(\overline{M_n}) = 1 - P(B_n) = \boxed{1 - U_n}$

④



⑤ les évènements $(B_n ; M_n)$ forment un système complet d'évènements.

D'après la formule des proba. totales :

$$U_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_n \cap B_{n+1}) + P(M_n \cap B_{n+1})$$

$$= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(M_n) \times P_{M_n}(B_{n+1})$$

$$= U_n \times \frac{4}{5} + (1-U_n) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{5}U_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}U_n$$

$$= \frac{4}{5}U_n - \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{U_{n+1} = \frac{3}{10}U_n + \frac{1}{2}}$ car $\frac{4^{\times 2}}{5_{\times 2}} - \frac{1^{\times 5}}{2_{\times 5}} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$