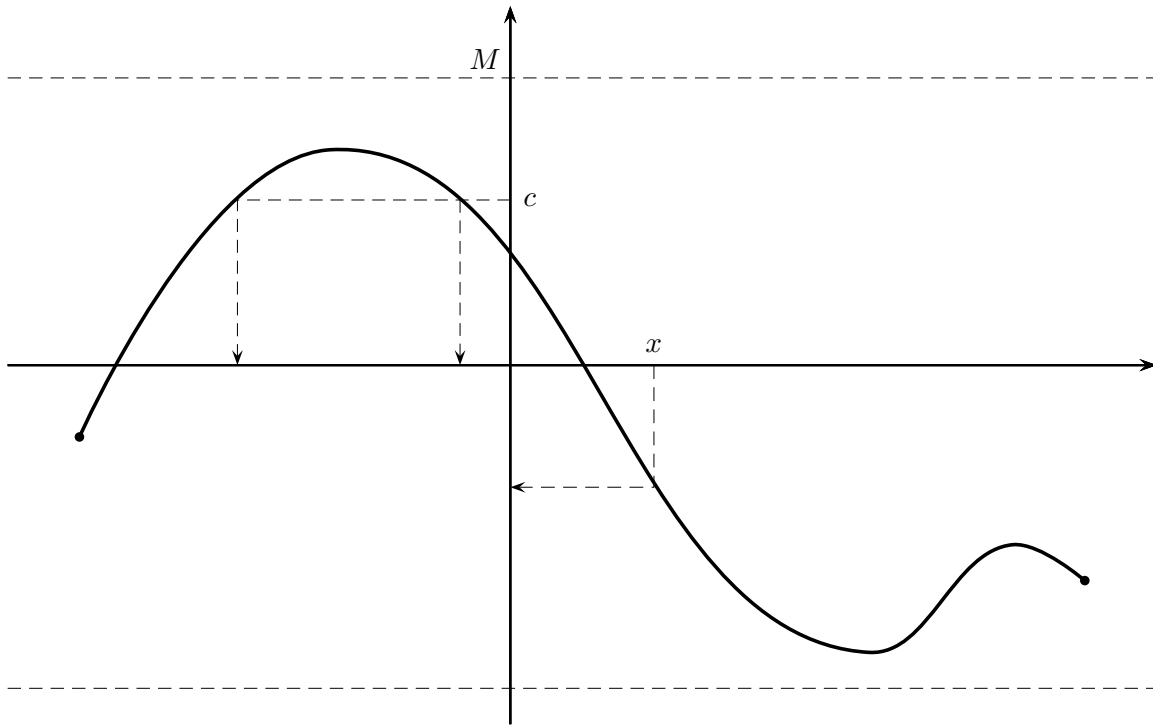


Chapitre n° 6 : Fonctions - Généralités (révisions)

Le but de ce chapitre est d'introduire le vocabulaire permettant de décrire une fonction.

Illustration :



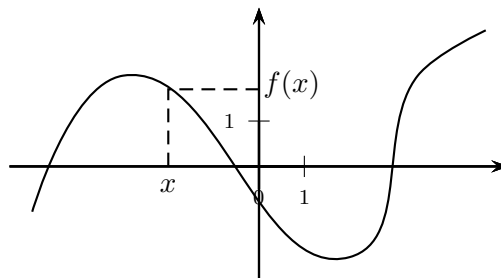
1 Représentation graphique d'une fonction

1.1 Courbe représentative

Définition 1.1

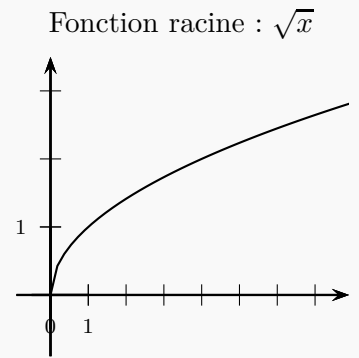
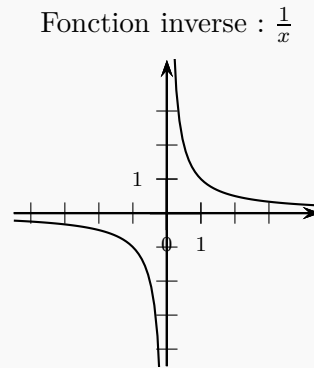
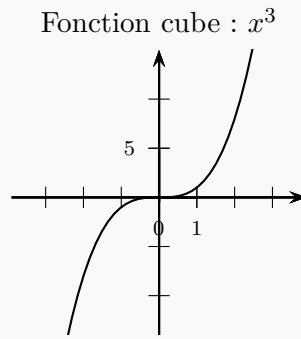
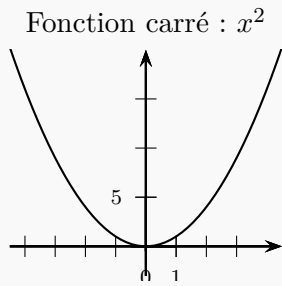
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Dans un repère du plan, les points de coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in \mathcal{D}$, forment la courbe représentative de la fonction f .

Illustration :

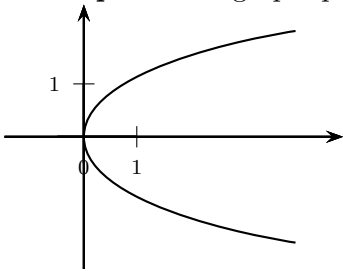


Remarque 1. Sur la représentation graphique, on lit x sur l'axe des abscisses et $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

Propriété 1.1: Représentation graphique des fonctions usuelles (à garder en tête!)



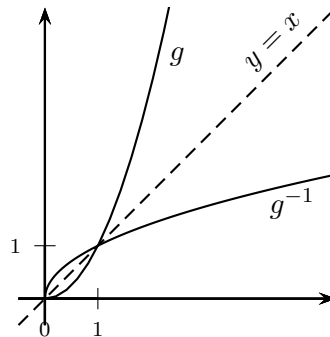
Remarque 2. Ce graphique peut-il être la représentation graphique d'une fonction ?



Propriété 1.2

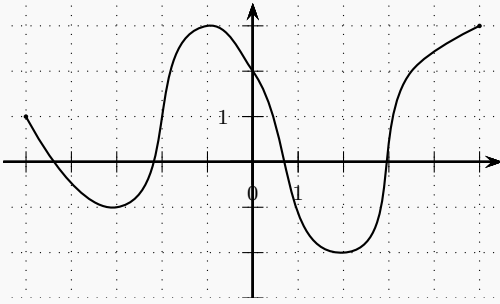
Soit f une fonction bijective et f^{-1} sa réciproque. Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 1. On a vu que la fonction $g(x) = x^2$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque est la fonction $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$).



1.2 Lecture graphique

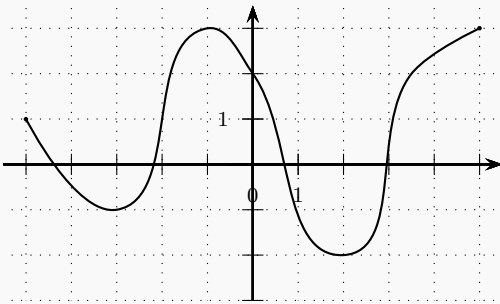
On étudie ci-dessous l'exemple d'une fonction définie sur $[-5, 5]$. On en donne la représentation graphique.



Pour déterminer l'image d'un réel a :

Placer a en abscisse et déterminer l'ordonnée $f(a)$ du point associé.

Ici, l'image de 4 est

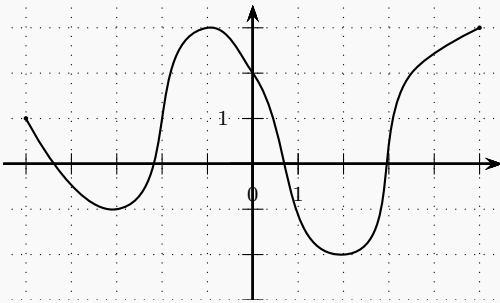


Pour déterminer les antécédents d'un réel c :

Placer c en ordonnée et déterminer les abscisses des points d'intersections entre la droite d'équation $y = c$ et la courbe.

Ici, les antécédents de 1 sont

$-2, 5$ n'a pas d'antécédent.



Pour résoudre une inéquation du type

$$f(x) \geq c \quad \text{ou} \quad f(x) \leq c$$

Placer c en ordonnée et tracer la droite d'équation $y = c$. Déterminer alors l'ensemble des abscisses des points de la courbe se situant au-dessus de cette droite (ou au-dessous selon les cas).

Ici l'inéquation $f(x) < -1, 5$ a pour ensemble de solutions

L'inéquation $f(x) \geq 2$ a pour ensemble de solutions

2 Monotonie

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On donne les définitions suivantes :

- f est croissante sur I si :

Pour tous éléments x et y de I , si $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$. Autrement écrit :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f est strictement croissante sur I si :

Pour tous éléments x et y de I , si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$. Autrement écrit :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Définition 2.2

- f est décroissante sur I si :

Pour tous les éléments x et y de I , si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$. Autrement écrit :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- f est strictement décroissante sur I si :

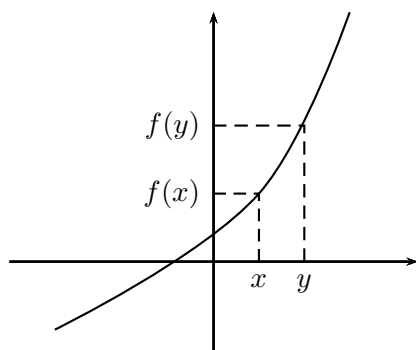
Pour tous les éléments x et y de I , si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$. Autrement écrit :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

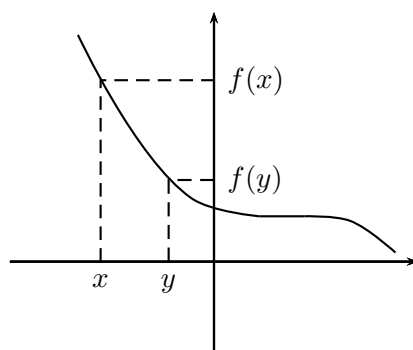
Si f est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Si f est strictement croissante ou strictement décroissante, on dit qu'elle est strictement monotone.

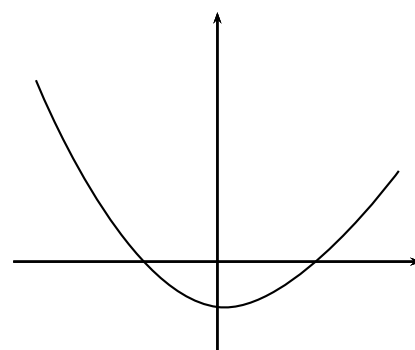
Illustration :



Fonction strictement croissante

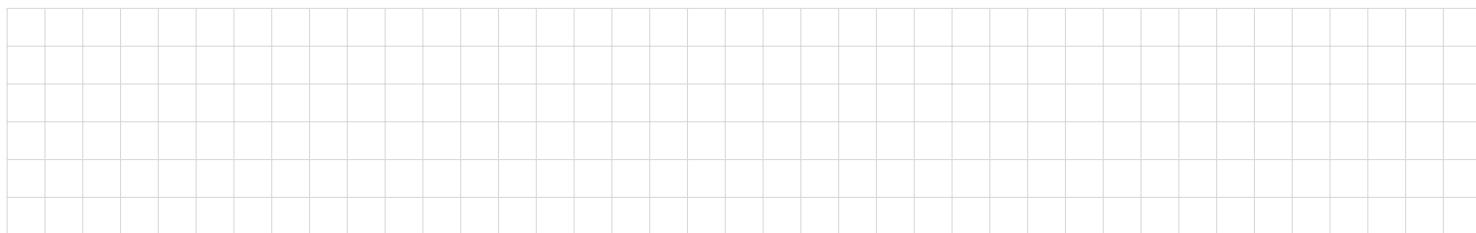


Fonction décroissante mais pas strictement décroissante



Fonction pas monotone

Exemple 2. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 7$.



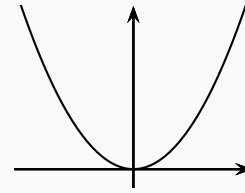
Remarque 3. • Une fonction croissante est donc une fonction qui conserve l'ordre des réels, une fonction décroissante inverse l'ordre des réels.

- L'étude de la monotonie se fait uniquement sur un intervalle. Par exemple, si f est définie sur $\mathbb{R}^*$, on étudiera les variations sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- On résume souvent les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Propriété 2.1: Monotonie des fonctions usuelles :

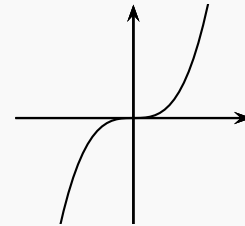
- La fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			



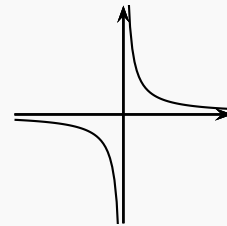
- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		



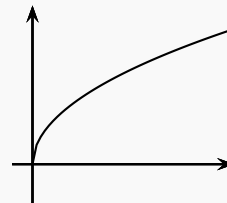
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			



- La fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		



Remarque 4. • Plus généralement, la fonction définie par $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) a les mêmes variations que la fonction carrée si n est pair, que la fonction cube si n est impair.

- On retrouve ce qui a été vu dans le chapitre 1 sur la fonction carrée :
 si $0 \leq x \leq y$, alors $x^2 \leq y^2$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
 si $x \leq y \leq 0$, alors $x^2 \geq y^2$ car la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

3 Encadrement d'une fonction

3.1 Majorant, minorant

Définition 3.1

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée sur $\mathcal{D}$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M$$

M est alors appelé un majorant de f sur $\mathcal{D}$.

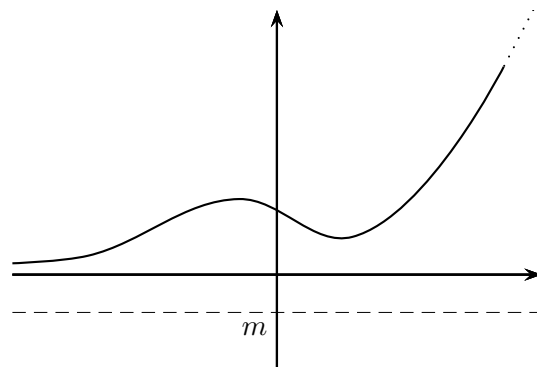
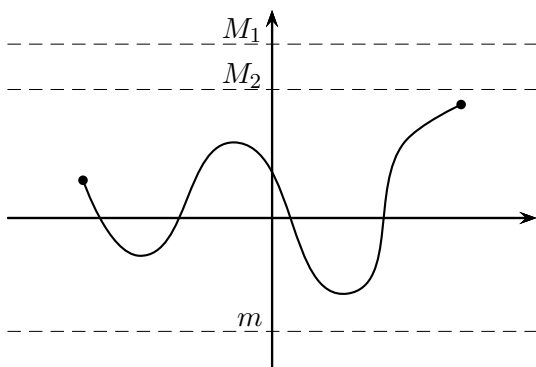
- On dit que f est minorée sur $\mathcal{D}$ si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m$$

m est alors appelé un minorant de f sur $\mathcal{D}$.

- On dit que f est bornée si f est majorée et minorée.

Illustration :



Remarque 5. • Les majorants et les minorants sont des constantes, donc ils ne doivent pas dépendre de x .

- Il n'y a pas unicité du minorant ou du majorant.
- La négation de la proposition “ f est majorée sur $\mathcal{D}$ ” est

Exemple 3. On peut en déduire les résultats suivant avec les fonctions usuelles.

La fonction carrée est

La fonction cube est

Exemple 4. Soit $f(x) = -4\sqrt{2x+6}$. Montrer que f est bornée sur $[-3, 3]$ et déterminer un encadrement de f sur cet intervalle.



3.2 Maximum, minimum

Définition 3.2

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

- On dit que f a un maximum sur $\mathcal{D}$ en x_0 si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq f(x_0)$$

$f(x_0)$ est alors appelé le maximum de f sur $\mathcal{D}$.

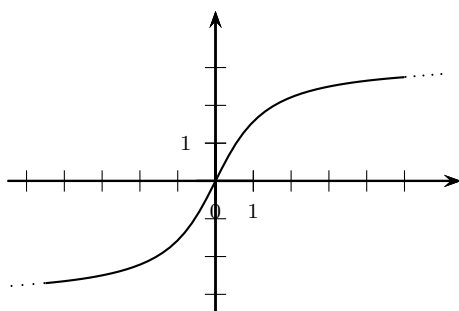
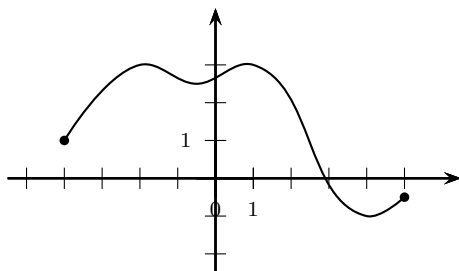
- On dit que f a un minimum sur $\mathcal{D}$ en x_0 si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq f(x_0)$$

$f(x_0)$ est alors appelé le minimum de f sur $\mathcal{D}$.

- On dit que f a un extremum si f a un minimum ou un maximum.

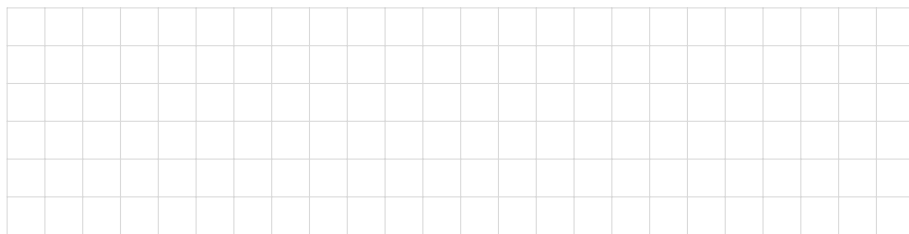
Illustration :



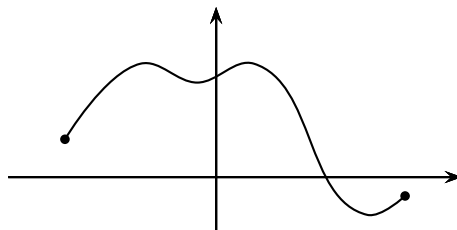
Remarque 6. Un maximum est donc un majorant de f , qui est atteint par f (c'est-à-dire de la forme $f(x_0)$). Ainsi, si f a un maximum, alors f est majorée. Mais une fonction peut-être majorée sans avoir de maximum.

Exemple 5. On considère la fonction f définie sur $[-5, 5]$, dont le tableau de variations est le suivant. f admet-elle des extremums ?

x	-5	-1	3	5
f	3		0	
		-1		-2



Remarque 7. Lorsqu'une valeur prise par f n'est pas la plus grande sur tout l'ensemble $\mathcal{D}$, mais uniquement localement, on peut parler de maximum local (même idée pour un minimum local).



4 Parité

Définition 4.1

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

- On dit que f est paire si : $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D} \text{ et } f(-x) = f(x)$
- On dit que f est impaire si : $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D} \text{ et } f(-x) = -f(x)$

Exemple 6. Étudier la parité de la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$.



Remarque 8. Une fonction peut être ni paire, ni impaire : la négation de “ f est paire” n’est pas “ f est impaire” ! Pour montrer qu’une fonction est ni paire ni impaire, on peut trouver un contre-exemple, c’est-à-dire un nombre x tel que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

Exemple : Soit $f(x) = 3x^2 + x$.

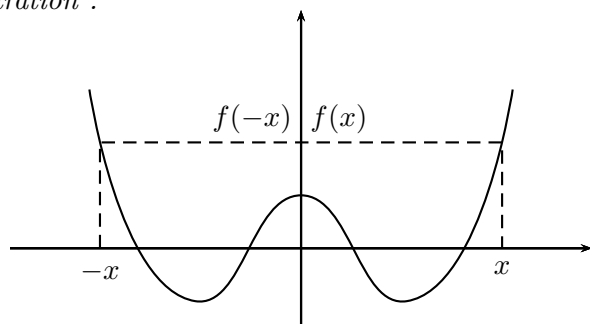
Remarque 9. Si f est une fonction impaire et si $0 \in \mathcal{D}$ alors : $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Propriété 4.1

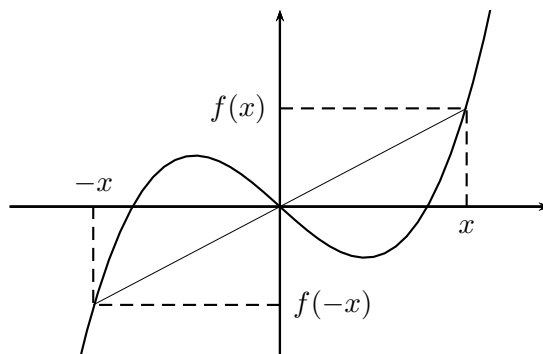
Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Si f est paire, alors $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Illustration :



Fonction paire



Fonction impaire

Remarque 10. Connaître la parité d'une fonction permet de simplifier l'étude de f : on étudie f sur $\mathcal{D} \cap [0, +\infty[$, et on en déduit le comportement de f sur $\mathcal{D} \cap]-\infty, 0]$ par symétrie.