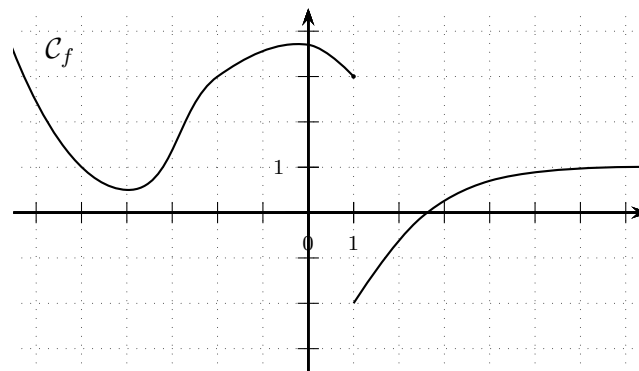


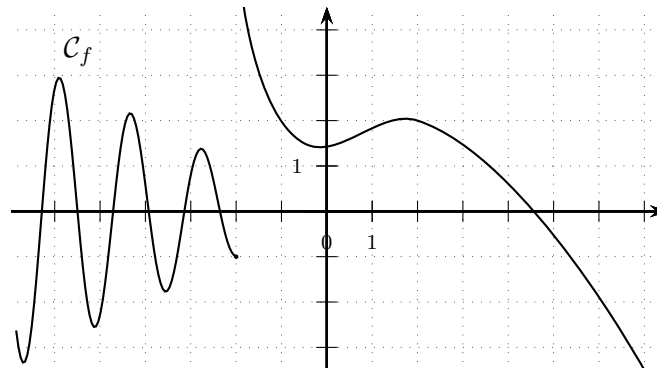
CHAPITRE 7 : LIMITES DE FONCTIONS

1 Des exemples introductifs



Comment semble se comporter $f(x)$...

- lorsque x devient très grand (se rapproche de $+\infty$) ?
- lorsque x se rapproche de -2 ?
- lorsque x devient très grand dans les négatifs (se rapproche de $-\infty$) ?
- lorsque x se rapproche de 1 ?



Comment semble se comporter $f(x)$...

- lorsque x devient très grand (se rapproche de $+\infty$)
- lorsque x devient très grand dans les négatifs (se rapproche de $-\infty$) ?
- lorsque x se rapproche de -2 ?

2 Limites en un point

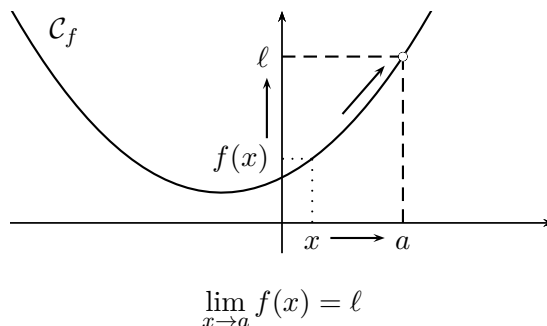
On s'intéresse ici aux différents comportements possibles d'une fonction lorsque x se rapproche d'un réel a . Dans toute cette partie, on considère donc une fonction f définie au voisinage d'un réel a .

2.1 Limite finie en un point

Définition 2.1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ lorsque x tend vers a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ , pourvu que x s'approche suffisamment de a .

Illustration :



Proposition 2.1

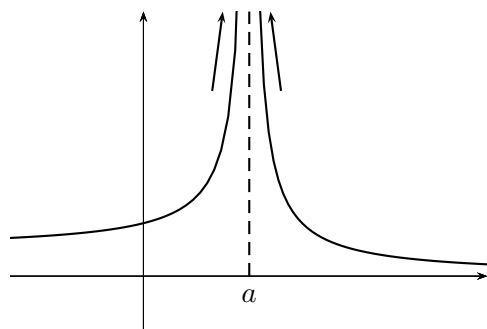
Si f est définie en a et si f admet une limite en a , alors cette limite vaut $f(a)$.

2.2 Limite infinie en un point

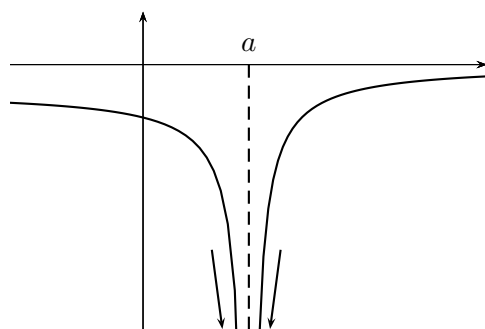
Définition 2.2

- On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand dans les positifs que l'on veut, pourvu que x s'approche suffisamment de a .
- On dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand dans les négatifs que l'on veut, pourvu que x s'approche suffisamment de a .

Illustration :



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

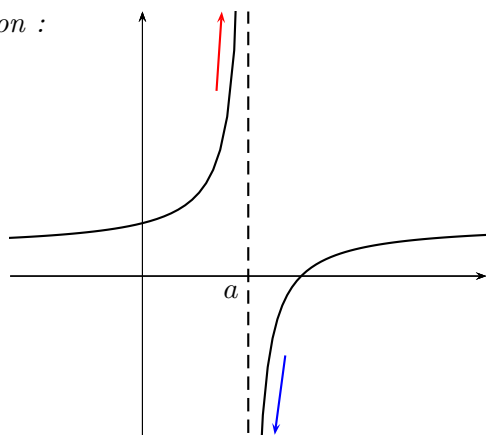
Remarque 1. Ceci se produit généralement quand a est une valeur interdite de f .

2.3 Limite à gauche et à droite en un point

Définition 2.3

- Si on étudie la limite de $f(x)$ en faisant tendre x vers a par valeurs strictement supérieures à a uniquement, on parle de limite à droite. On note alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, selon le cas.
- Si on étudie la limite de $f(x)$ en faisant tendre x vers a par valeurs strictement inférieures à a uniquement, on parle de limite à gauche. On note alors : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, selon le cas.

Illustration :



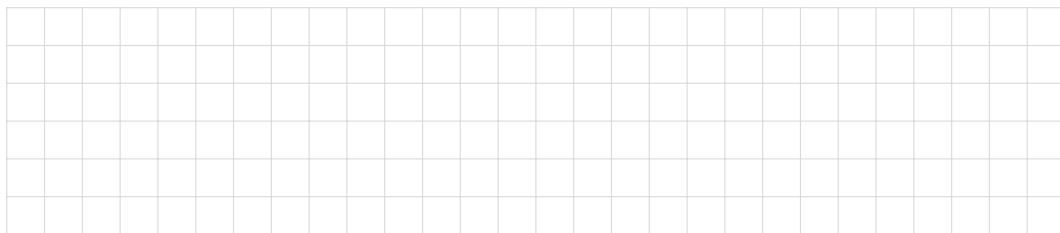
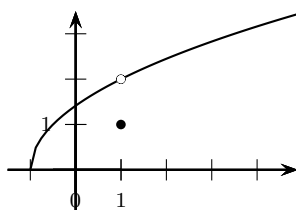
Ici :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \text{ (limite à gauche)}$$

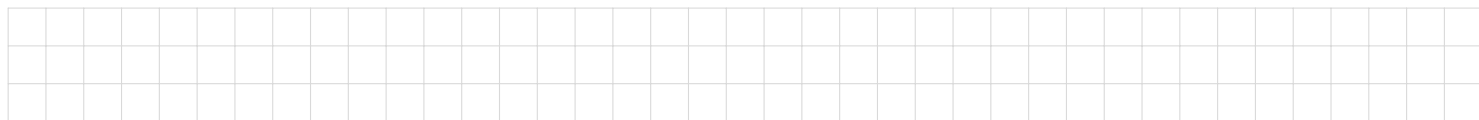
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \text{ (limite à droite)}$$

Remarque 2. Une fonction peut donc avoir deux comportements très différents selon que x s'approche de a par la droite ou par la gauche.

Exemple 1. Que pensez-vous du comportement de f au voisinage de 1 sur la figure suivante ?



Remarque 3. Si f est définie en a et admet des limites finies à droite et à gauche en a , alors f a une limite en a si et seulement si :



3 Limites en l'infini

On s'intéresse ici aux différents comportements possibles d'une fonction lorsque x devient très grand (négatif ou positif).

Dans toute cette partie, on considère donc une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ selon les cas.

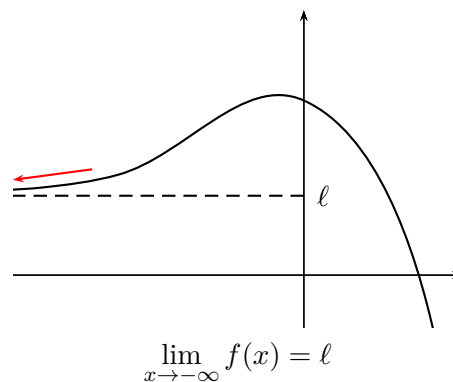
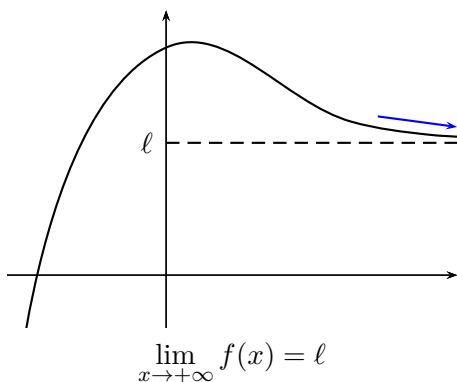
3.1 Limite finie en l'infini

Définition 3.1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ , pourvu que x est pris suffisamment grand positivement.
- On dit que $f(x)$ a pour limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ , pourvu que x est pris suffisamment grand négativement.

Illustration :



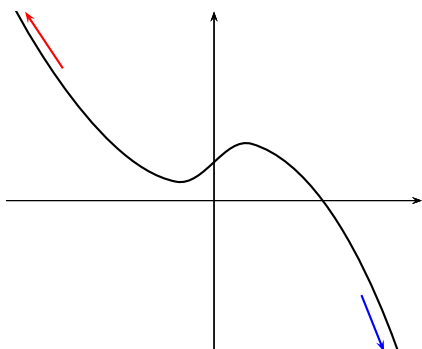
3.2 Limite infinie en l'infini

Définition 3.2

- On dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand positivement que l'on veut, pourvu que x est pris suffisamment grand positivement.
- On dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand négativement que l'on veut, pourvu que x est pris suffisamment grand positivement.

Remarque 4. On peut définir de la même manière les limites infinies en $-\infty$.

Illustration :



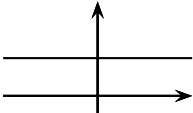
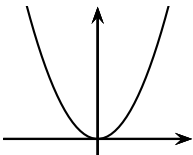
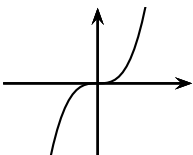
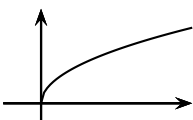
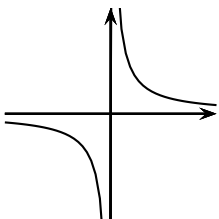
Ici :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4 Calculs de limites

4.1 Limites des fonctions usuelles

Fonction	$\mathcal{D}_f$	Courbe	En $-\infty$	En 0	En $+\infty$
C constante	$\mathbb{R}$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} C =$	$\lim_{x \rightarrow 0} C =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} C =$
x^n $n \in \mathbb{N}^*$ pair	$\mathbb{R}$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n =$
x^n $n \in \mathbb{N}^*$ impair	$\mathbb{R}$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n =$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$			$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} =$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} =$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$

Remarque 5. Pour toute fonction usuelle f (de la liste ci-dessus), pour tout point a de $\mathcal{D}_f$, on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} =$ $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} =$

4.2 Opérations algébriques sur les limites

Soit a un réel, ou $a = -\infty$, ou $a = +\infty$.

On considère deux fonctions f et g admettant une limite finie ou infinie, en a .

Dans ce qui suit, ℓ et ℓ' représentent des limites finies.

Lorsqu'on ne peut pas conclure quant au résultat, on dit qu'on est face à une forme indéterminée (on note FI dans les tableaux). Il faut alors trouver un autre moyen pour conclure.

Limite d'une somme :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$						

Limite d'un produit :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	$+\infty$				$-\infty$		
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$								

Limite d'un quotient :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell' \neq 0$			$\pm\infty$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$					

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	0^+				0^-			
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$								

Remarque 6. • Il y a donc quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$, signifie que g tend vers 0, par valeurs positives.
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$, signifie que g tend vers 0, par valeurs négatives.
- Pour un produit ou un quotient, on a besoin de connaître le signe des deux termes, y compris le « signe du 0 ».
- Pour déterminer une limite, on pourra :
 1. déterminer si oui, ou non, on se trouve dans le cadre d'une forme indéterminée
 2. Si non, pour déterminer la limite, il faut du bon sens accompagné de la règle des signes.
 3. Si oui, il faut lever l'indétermination.

Exemple 2. • Limites sans problème :

$$\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 \sqrt{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{x^3}$$

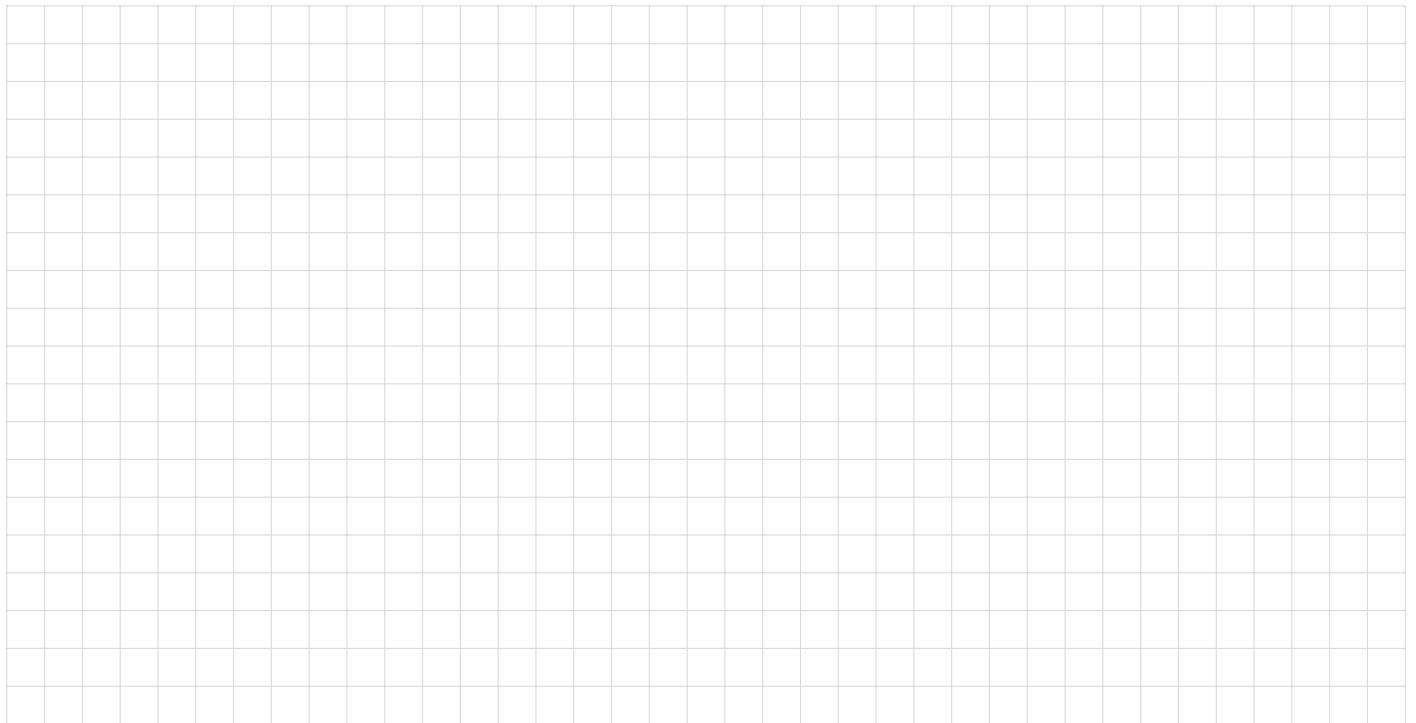


- Limite d'un quotient avec dénominateur qui tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{(x-5)^2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 3}{4 - 2x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x - 3}{4 - 2x}$$



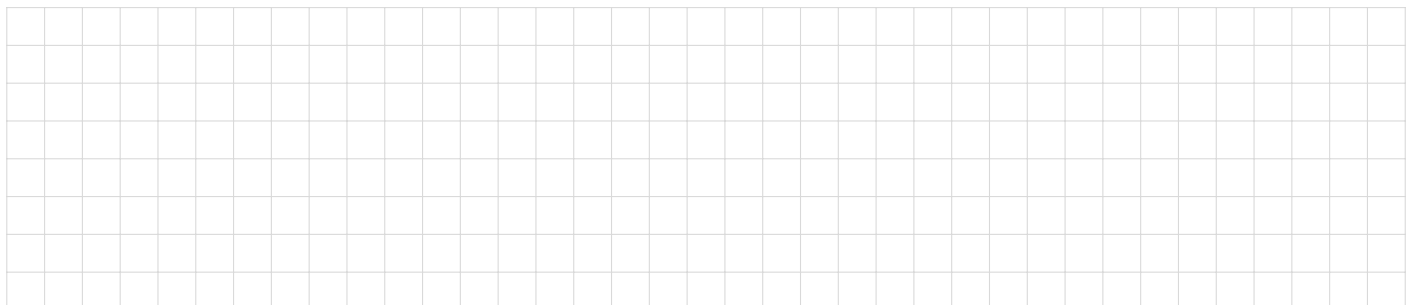
• **Lever une indétermination...**

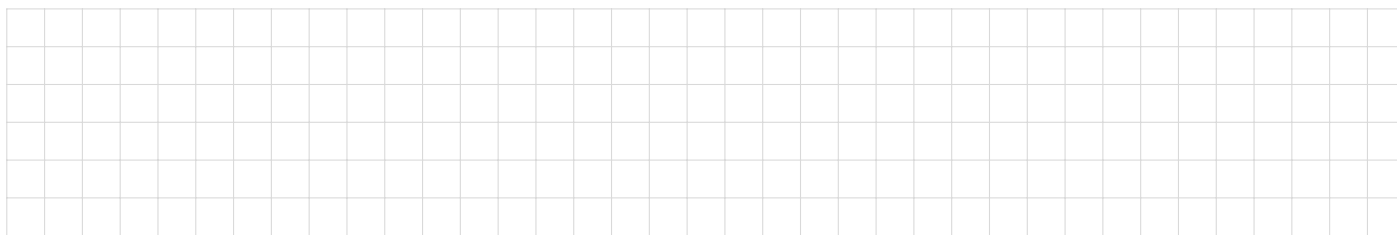
...en simplifiant :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3}$$



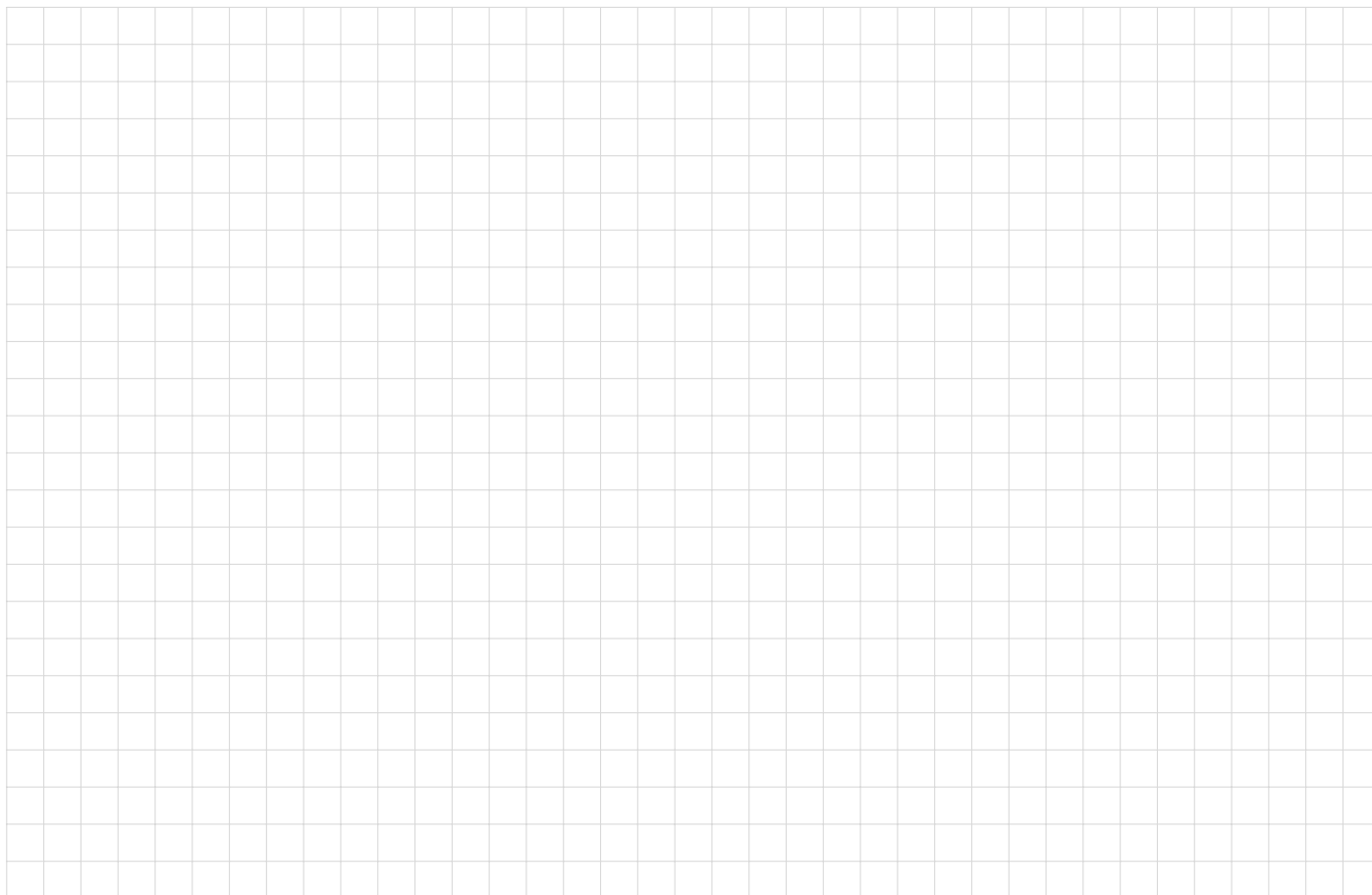
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}}$$





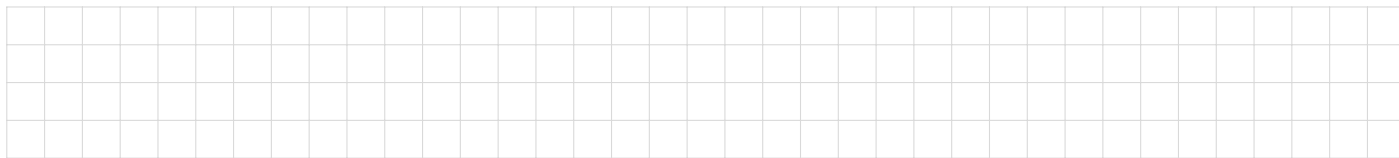
... en factorisant par le terme « dominant » :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5\sqrt{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x + 1}$$





Remarque 7. Pour l'étude de polynômes et de fractions rationnelles, nous avons le résultat suivant qui permet de lever les indéterminations en $\pm\infty$.

Proposition 4.1

- Soit f une fonction polynôme de la forme : $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.
La limite de f en $\pm\infty$ est celle de son terme de plus haut degré :

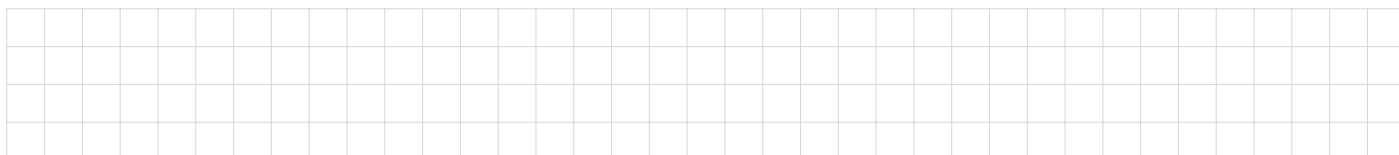
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_nx^n$$

- Soit g une fonction rationnelle de la forme : $g(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_px^p}$.
La limite de g en $\pm\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_px^p} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_p}x^{n-p}$$

Exemple 3. Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$

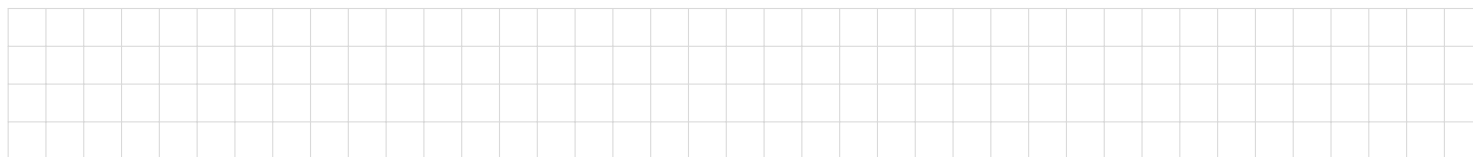


- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{2x + x^3 - 6x^5}$



Remarque 8. • Pour l'étude des fractions rationnelles, il ne faut pas oublier de simplifier les x après avoir gardé les termes de plus haut degré.

- Attention, ce critère ne marche qu'en $\pm\infty$! Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$





4.3 Limite d'une composée

Définition 4.1

Soit f et g deux fonctions réelles à variable réelle. La composée de la fonction f par la fonction g est la fonction notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarque 9. Il faut comprendre la composée ainsi : $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$. On applique f à x , puis g au résultat obtenu.

Exemple 4. Écrire les fonctions suivantes sous forme de composées de deux fonctions simples.

$$\sqrt{3x-1}$$

$$\frac{1}{3x^2 - x + 1}$$

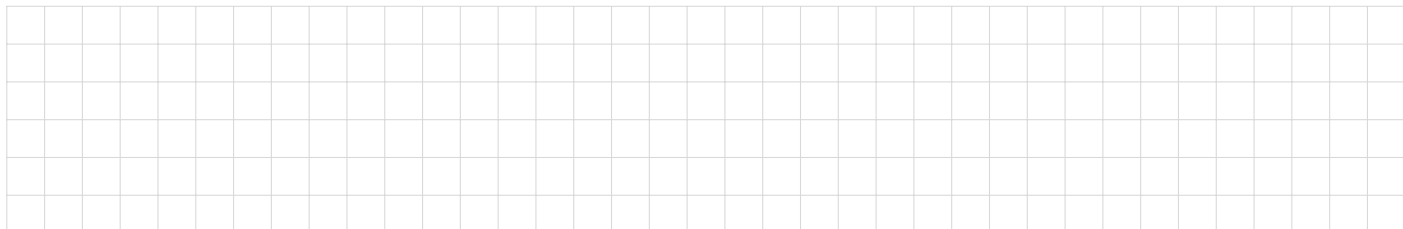
Proposition 4.2

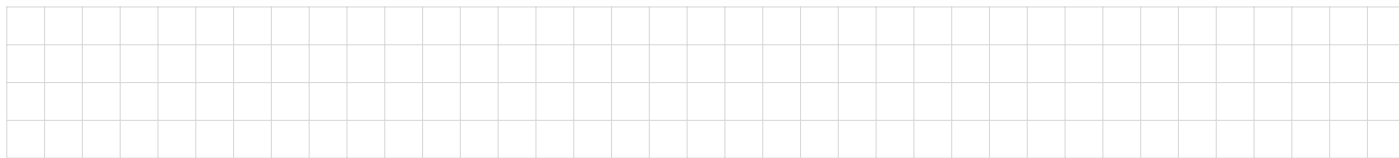
Soit f et g deux fonctions. Soit a, b, ℓ des valeurs finies ou infinies. Supposons que la composée $g \circ f$ est définie au voisinage de a .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} g(X) = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$$

Exemple 5. Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2}$





- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1})^5$



5 Asymptotes et branches paraboliques

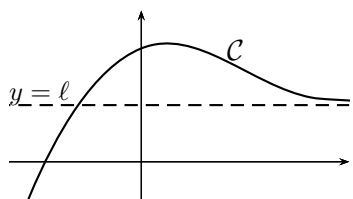
On considère donc dans toute cette partie une fonction f et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

5.1 Asymptotes horizontales

Définition 5.1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ au voisinage de $\pm\infty$.

Illustration :

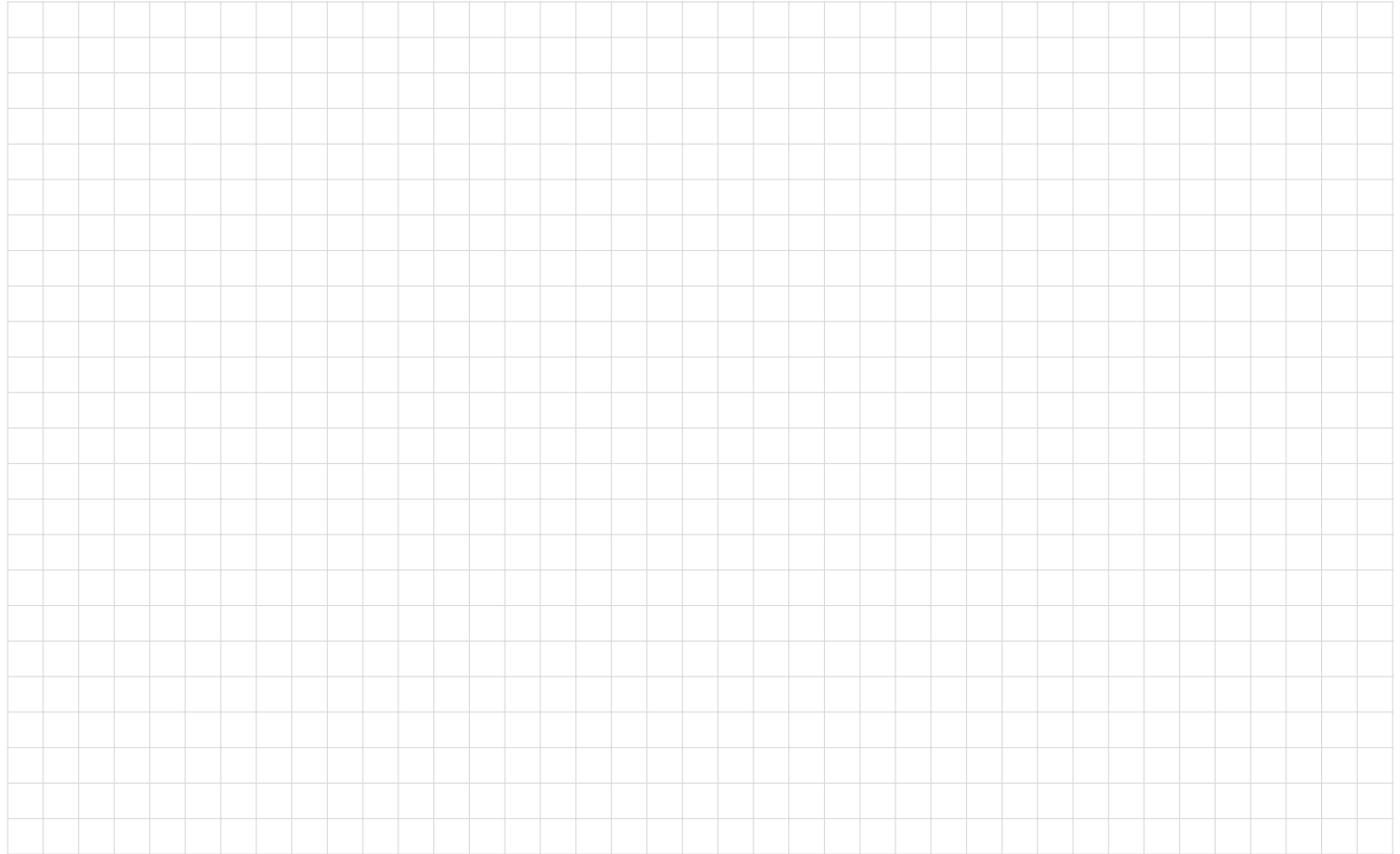


Ici, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 10. • Une asymptote est donc une droite $\mathcal{D}$ telle que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche infiniment près de $\mathcal{D}$.

- On s'intéressera parfois aux positions relatives de la courbe et de l'asymptote : il s'agit de savoir si la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'asymptote. Pour cela, on doit étudier le signe de $f(x) - \ell$:
 - Si $f(x) - \ell \geq 0$, alors la courbe de f est au-dessus de l'asymptote.
 - Si $f(x) - \ell \leq 0$, alors la courbe de f est au-dessous de l'asymptote.

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ et étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

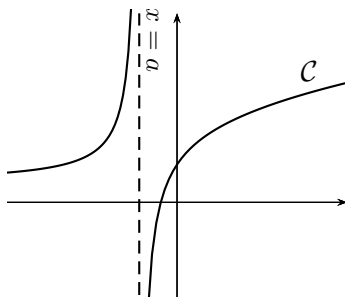


5.2 Asymptotes verticales

Définition 5.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Illustration :



Ici $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Remarque 11. Il peut y avoir une asymptote verticale qu'en un point réel, souvent une valeur interdite de la fonction.

Exemple 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale en 3.



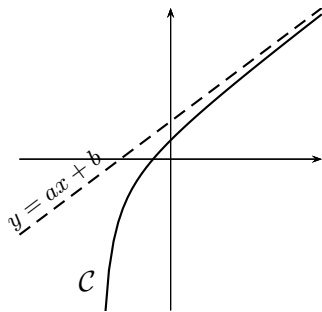
5.3 Asymptotes obliques

Définition 5.3

Soit a et b deux réels.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$.

Illustration :



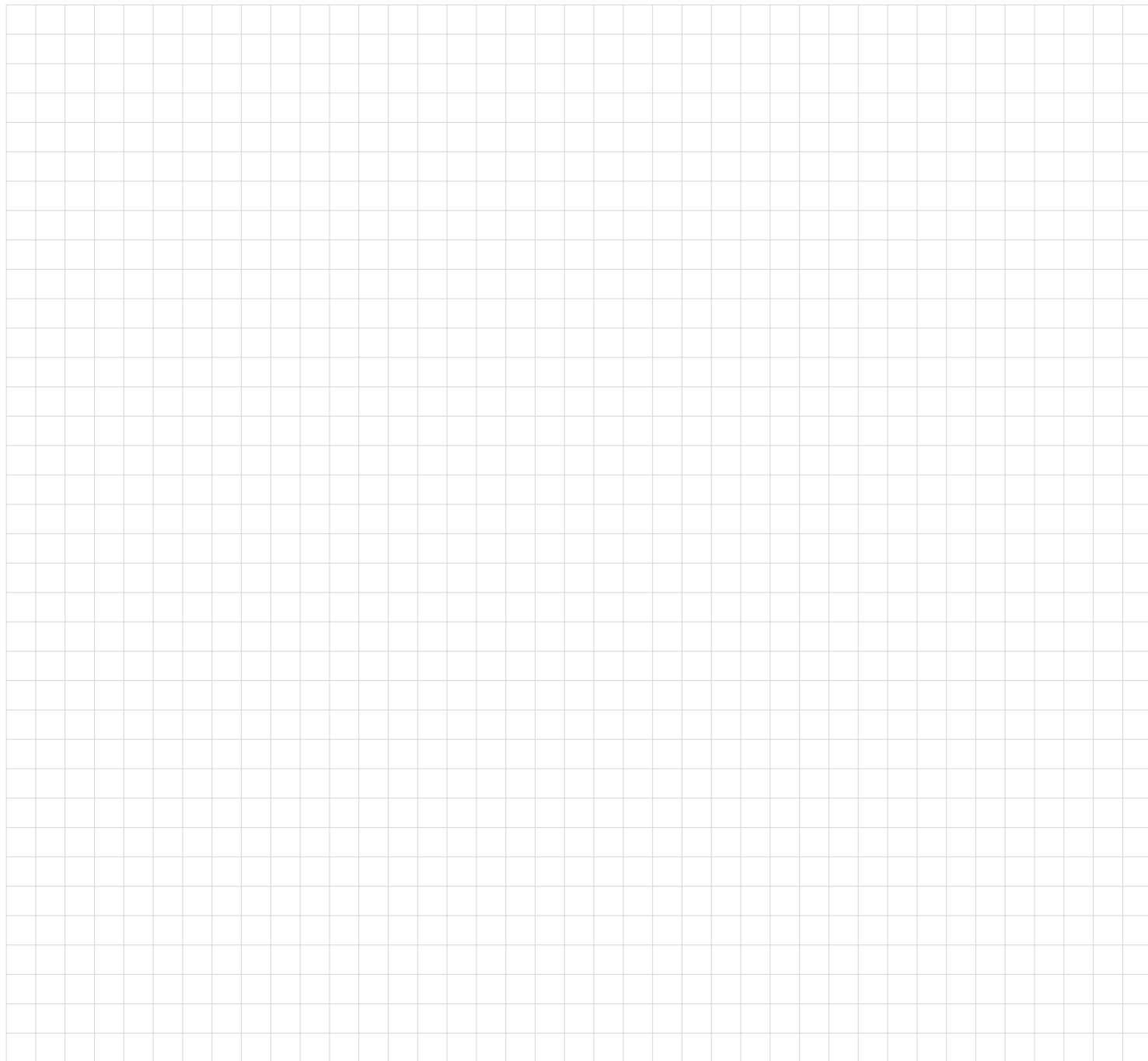
Ici $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 12. • Dire que $\mathcal{C}$ a une asymptote $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$ signifie que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche infiniment près de $\mathcal{D}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- On s'intéressera parfois aux positions relatives de la courbe et de l'asymptote : il s'agit de savoir si la courbe est au-dessus ou au-dessous de l'asymptote. Pour cela, on doit étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$:
 - Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$, alors la courbe de f est au-dessus de l'asymptote.
 - Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$, alors la courbe de f est au-dessous de l'asymptote.

Exemple 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

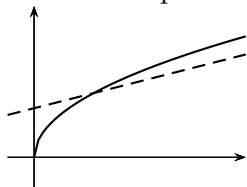
Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, puis déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.



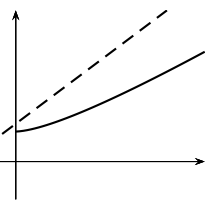
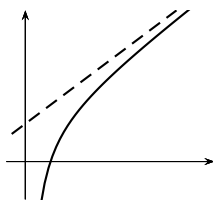
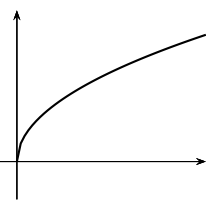
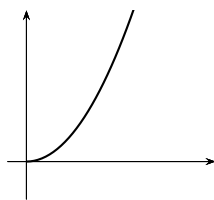
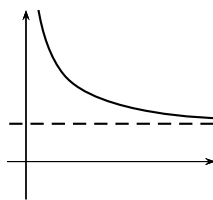
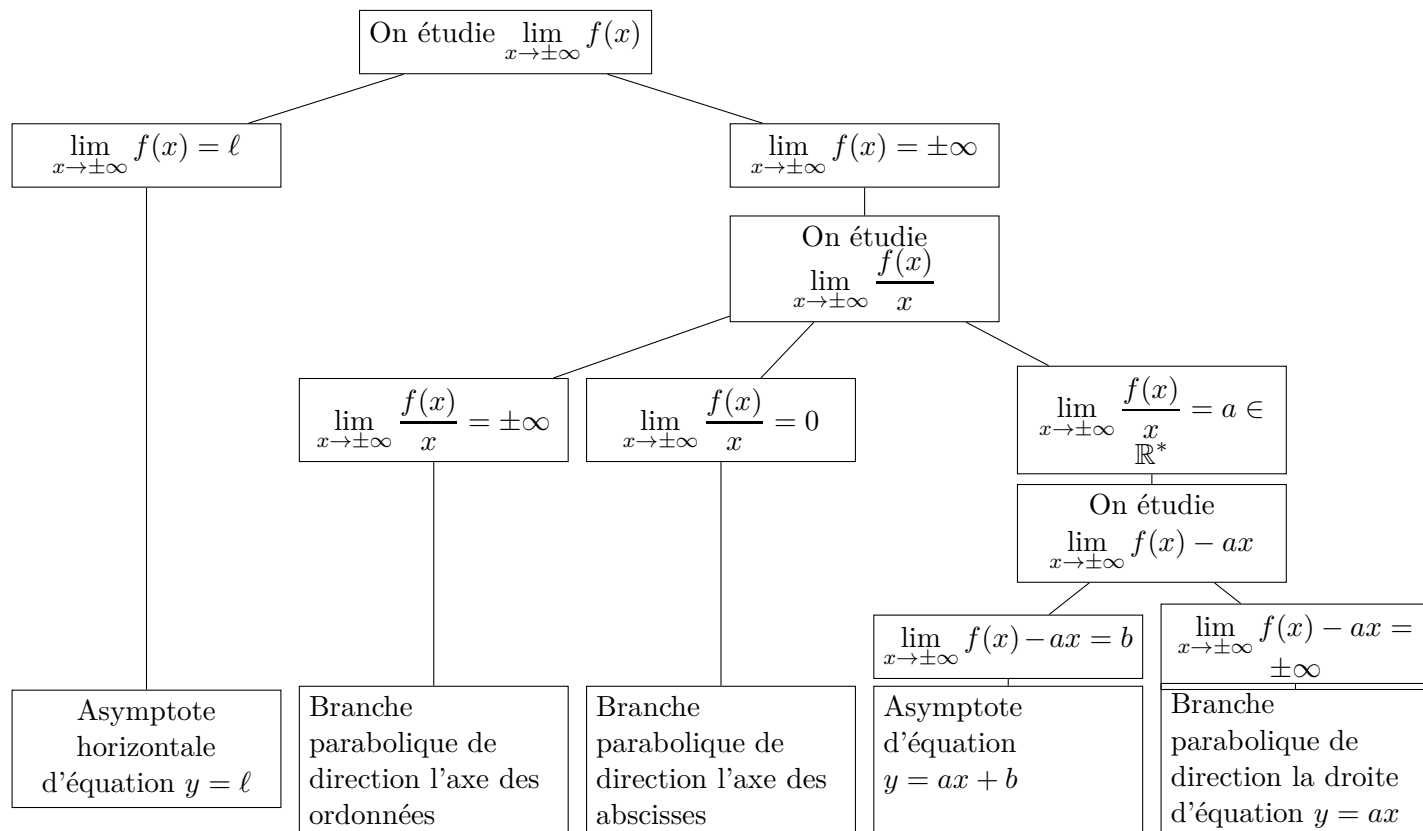
Remarque 13. Les courbes des fonctions définies au voisinage de $+\infty$ n'ont pas toutes des asymptotes !

Par exemple, on ne peut pas trouver de réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - (ax + b) = 0$, donc la courbe de $\sqrt{}$ n'a pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$ (la courbe s'éloigne indéfiniment de toute droite).

On va dire qu'elle a une branche parabolique.



5.4 Étude générale du comportement au voisinage de $\pm\infty$



Remarque 14. • Si l'équation $y = ax + b$ de l'asymptote est donnée, c'est inutile de passer par ce raisonnement : il faut directement étudier $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b)$.

- On dit parfois que la courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote à la courbe de f si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Exemple 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x}$. Étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.