Fiche N°2 : Suite Arithmético - Géométrique

Définition : Une suite (U_n) est arithmético-géométrique si, il existe a et b deux réels tels que : $\forall n \geq 0$ $\boxed{U_{n+1} = aU_n + b}$

Méthode

1ère étape : On résout l'équation

$$k = ak + b$$

(On remplace U_{n+1} et U_n par k)

2ème étape : On pose $V_n = U_n - k$

3ème étape : On démontre que la nouvelle suite (V_n) est géométrique.

↳ Pour cela, il faut partir de : $V_{n+1} = \dots$

$= \dots$

↓

Pour arriver à : $= \square \times V_n$

4ème étape : On donne la raison et le premier terme de (V_n)

↳ avec $V_n = U_n + k$

Exemple

On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = 4U_n - 3 \end{cases}$$

1. On résout
$$k = 4k - 3 \quad \big)\ -4k$$
$$k - 4k = -3$$
$$-3k = -3 \quad \big)\ \div(-3)$$
$$k = \frac{-3}{-3}$$

Donc $k = 1$

2. On pose $V_n = U_n - 1$

⚠ Attention au signe si k est négatif...

3.

On va utiliser dans l'ordre :
① $V_n = U_n - 1$
② $U_{n+1} = 4U_n - 3$
③ $U_n = V_n + 1$ (Autre version de ①)

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 1 && ① \\ &= 4U_n - 3 - 1 && ② \\ &= 4U_n - 4 \\ &= 4(V_n + 1) - 4 && ③ \\ &= 4V_n + 4 - 4 \end{aligned}$$

Donc $V_{n+1} = 4V_n$

Ainsi (V_n) est une suite géométrique.

4. La suite est géométrique de raison $q = 4$

et de 1er terme $V_0 = U_0 - 1$
$= 6 - 1 = 5$ (dans l'énoncé $U_0 = 6$)

5ème étape : On utilise la formule explicite d'une suite géométrique : $V_n = V_0 \times q^n$

6ème étape : On obtient l'expression de U_n en fonction de n avec la formule ③

③ $U_n = V_n + k$

⑤ $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = 5 \times 4^{n+1}$

⑥ On a $U_n = V_n + 1$

donc $\boxed{U_n = 5 \times 4^n + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$