

CHAPITRE 8 : LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1 Logarithme népérien

1.1 Définition et propriétés

On introduit une nouvelle fonction, en lien avec l'exponentielle (entre-aperçue en terminale).

Définition 1.1

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée $\ln$, qui à tout $x \in]0; +\infty[$ associe le réel $\ln(x)$.

Proposition 1.1

La fonction logarithme népérien est :

- Définie sur $]0, +\infty[$
- Continue sur $]0, +\infty[$
- Strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- Négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.
- $\ln(1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

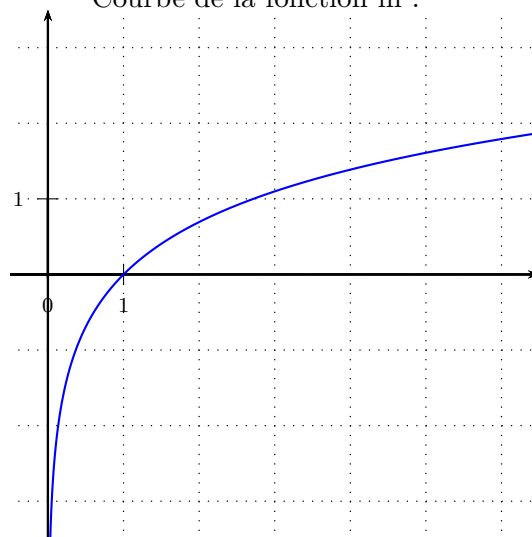
Tableau de signe de $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+

Tableau de variation de $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+	
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

Courbe de la fonction $\ln$:



Remarque 1. • $\ln$ n'est pas définie en 0 donc ne jamais écrire $\ln(0)$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc la courbe a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- On verra en fin de chapitre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc la courbe a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

1.2 Règles de calcul

Proposition 1.2

Soit a et b des réels strictement positifs et n un entier. On a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Exemple 1.

• $\ln(2) + \ln(3) =$

• $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) =$

• $\ln(5x^3) - \ln(10x^2) =$

• Déterminer le signe de $\ln(15) - 4\ln(2)$.

Remarque 2. D'après ces règles de calcul, on peut exprimer différemment le logarithme d'une expression multiplicative (produit, quotient, puissance), mais on ne peut rien dire sur le logarithme d'une expression additive ($\ln(a+b)$).

1.3 Un exemple d'étude de fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(3x+6)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier le signe de f .
3. Déterminer les limites de f en -2^+ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	+	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$+$		
$\exp$			

- On verra en fin de chapitre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc la courbe a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

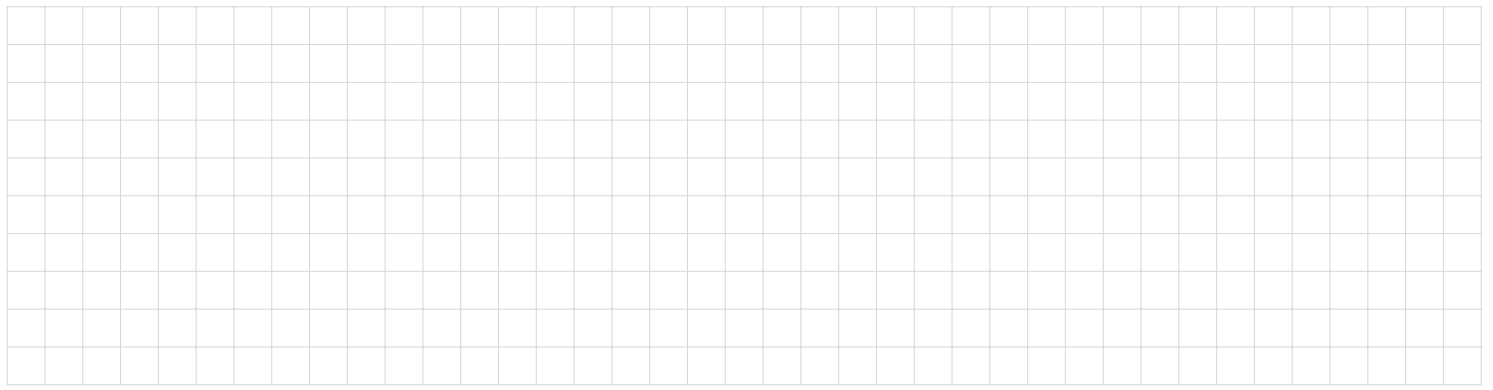
Proposition 2.3

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $(e^a)^n = e^{an}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

- Attention, on ne peut rien dire de $e^a + e^b$.

- $e^{-1} =$
- $e^7 e^2 =$
- $e^x e^{-x} =$
- $e^{-2 \ln(3)} =$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier le signe de f .
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.



3 Exemples de résolutions d'équations et d'inéquations

Méthode 3.1

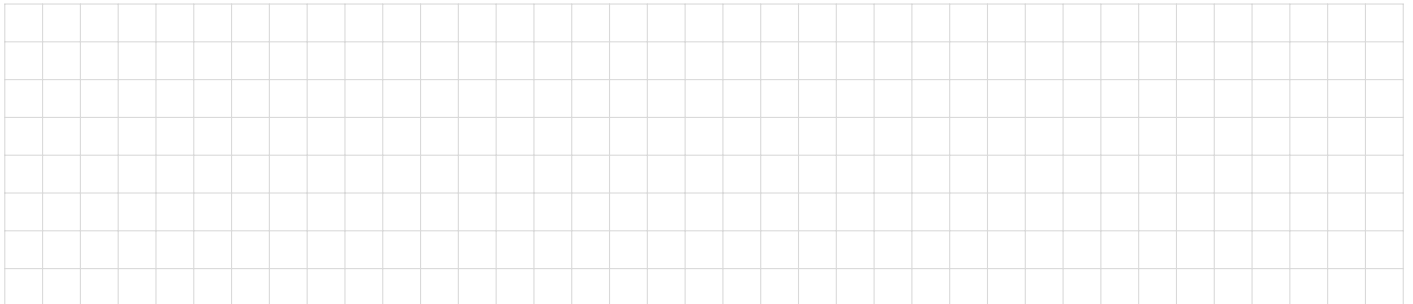
- Tenir compte de l'ensemble de définition.
- Chercher à isoler x .
- Pour “enlever” un logarithme, l'isoler puis “appliquer” l'exponentielle. L'appliquer à gauche et à droite.
- Pour “enlever” une exponentielle, l'isoler puis “appliquer” le logarithme. L'appliquer à gauche et à droite.

Exemple 4. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

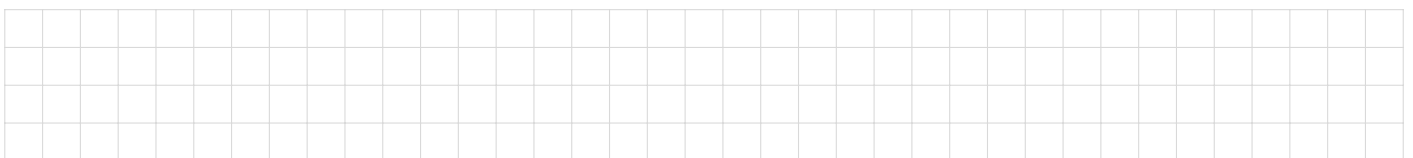
- $e^x - 5 = 0$



- $e^x + 3 = 0$



- $\ln(x + 1) - 5 \leq 0$.





- $e^x - e^{2x} \leq 0$



4 Comparaison des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée lors d'une étude de limite d'une fonction mêlant logarithme, puissances et exponentielle, on pourra utiliser le résultat ci-dessous qui traduit le fait que "l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme".

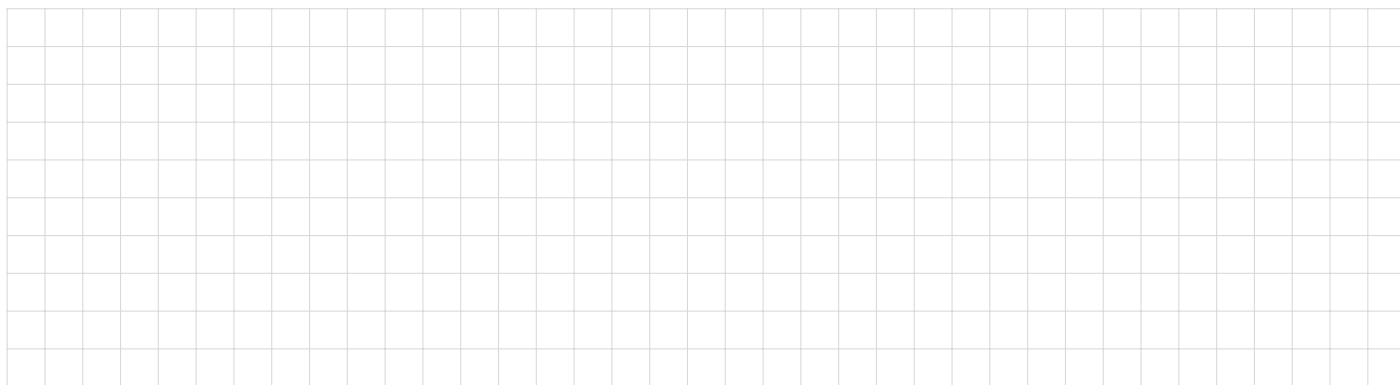
Proposition 4.1: Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{\beta x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln(x))^n = 0$$

Remarque 6. On peut interpréter la proposition des croissances comparées par le schéma suivant :



Remarque 7. • Les formules concernant les quotients peuvent être énoncées différemment :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

- Voici deux autres formules permettant aussi de lever des indéterminations :

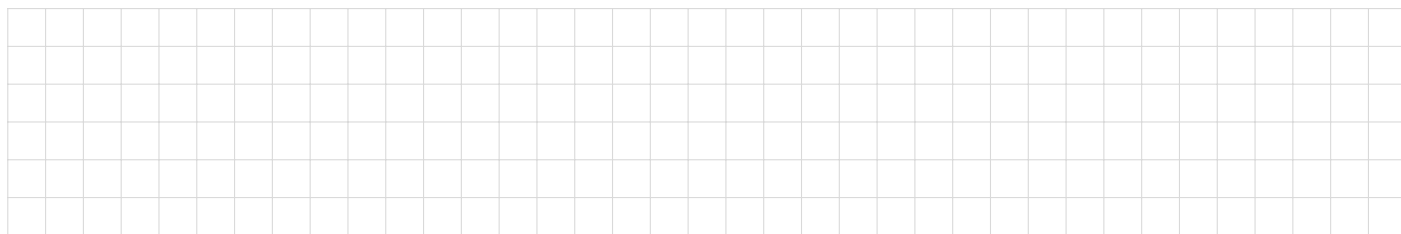
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} =$$

cette limite se réécrit aussi $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$ en posant $y = x - 1$.

Exemple 5. Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{-5x}$



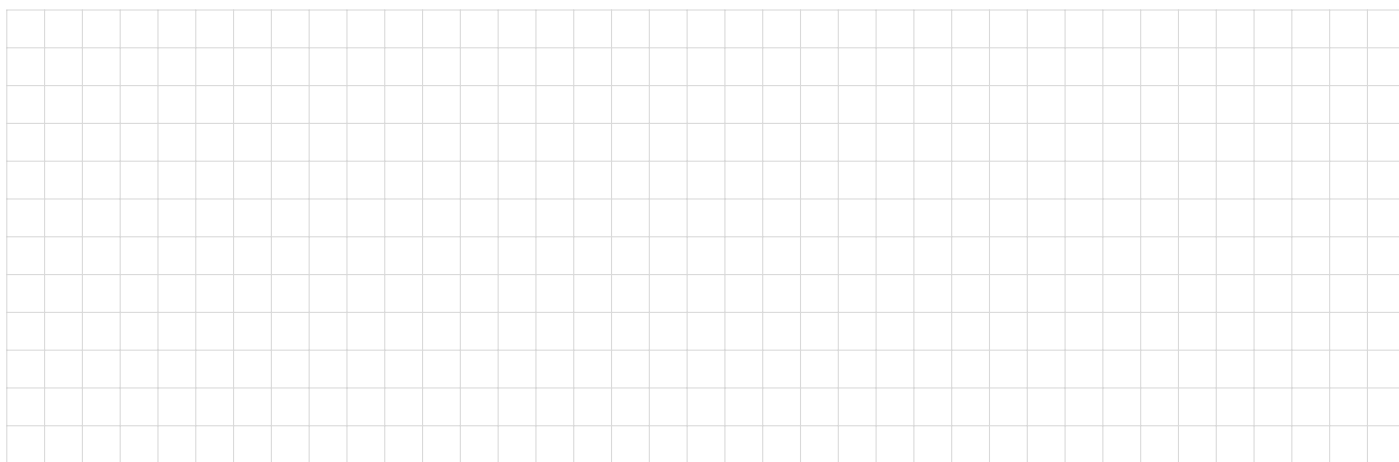
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x + 2)e^x$



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 5x}$



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5)e^{-x}$



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

