

CHAPITRE 9 : LA DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

1 Le principe de récurrence

On souhaite démontrer une propriété universelle de la forme : $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$.

Il faut donc démontrer que cette propriété est vraie **pour tout** entier naturel n à partir du rang n_0 .

Rappel : utiliser un exemple ne suffit pas !

Théorème 1.1: Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- **Initialisation** : $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.

alors la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1. Faire une récurrence c'est comme faire tomber une ligne infinie de dominos :

- Si on peut faire tomber le premier (Initialisation)
- et si la chute d'un domino entraîne le suivant (hérédité)
- alors tous les dominos vont tomber ! (conclusion)

2 Rédaction d'un raisonnement par récurrence

Remarque 2. Certaines propriétés $\mathcal{P}_n$ ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 (par exemple $n_0 = 1$ ou $n_0 = 2$ etc.). Dans ce cas on initialise au rang n_0 .

Méthode 2.1

Pour bien rédiger un raisonnement par récurrence il faut :

- Bien énoncer la propriété $\mathcal{P}_n$ que l'on veut démontrer pour tout $n \geq n_0$ ou n_0 est le premier rang.
- **Initialisation** : Montrer que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \geq n_0$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie (on dit que la propriété est héréditaire).
- **Conclusion** : Par principe de récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Modèle à suivre :

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathcal{P}_n$:

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

.....*Calculs*.....

Donc et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Montrons que : $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Alors*Calculs*.....

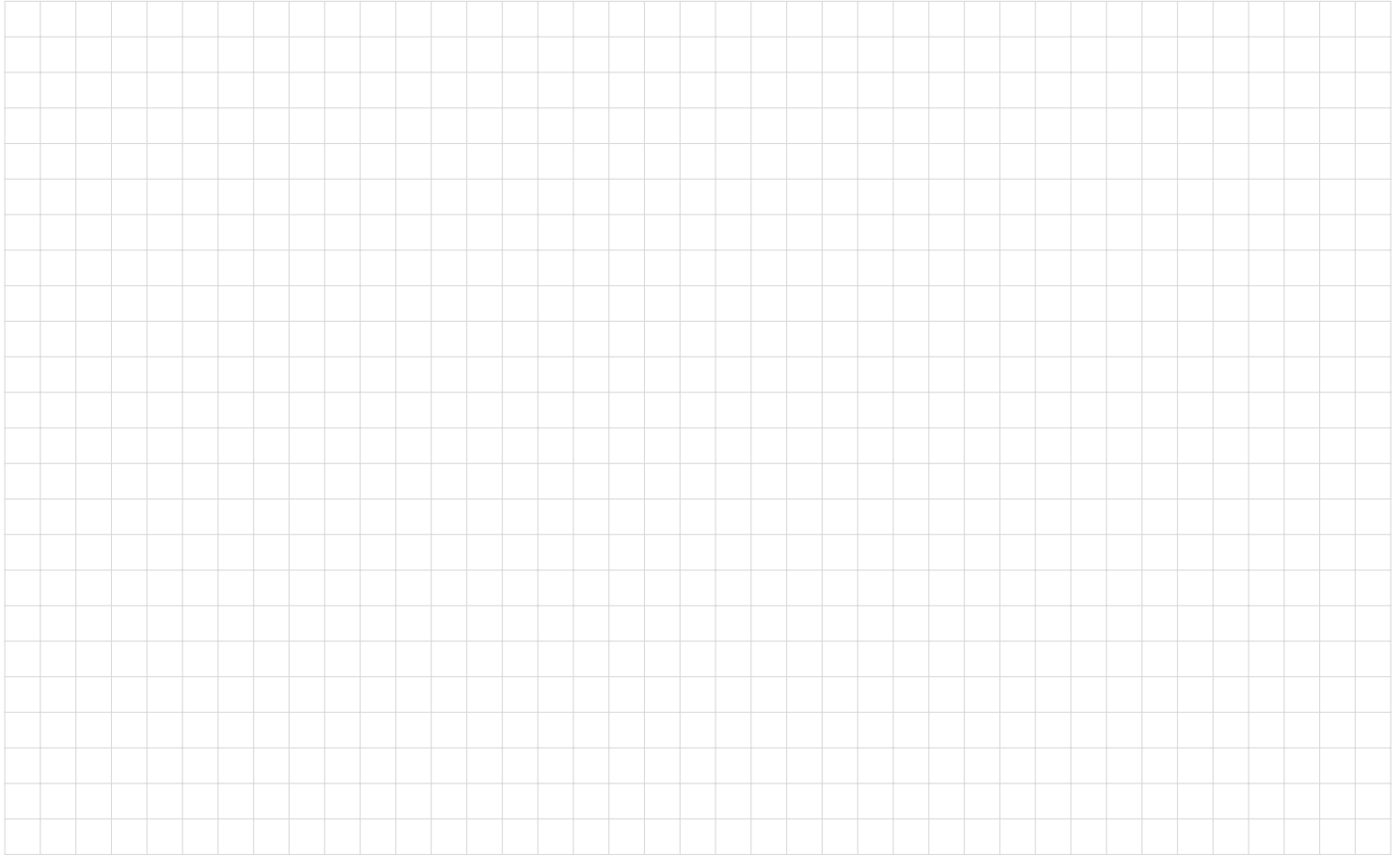
Donc et la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

Remarque 3. • Ce modèle peut être adapté si on se place sur $\mathbb{N}^*$. Le rang initial est alors le rang 1.

- Pour compléter l'hérédité, réfléchir à ce qui fait le lien entre la propriété au rang k et la propriété au rang $k + 1$.
- Le principe de récurrence est très utile pour montrer une propriété portant sur une suite définie par récurrence, car la relation de récurrence nous aide à vérifier l'hérédité.

Exemple 1. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.



Méthode 2.2

Voici un exemple de rédaction dans une situation concrète. Les passages en gras sont présents dans tout raisonnement par récurrence et **doivent être appris par cœur**.

Exemple : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 3$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : " $u_n \geq 3$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et $4 \geq 3$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \geq 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.

Par définition de la suite (u_n) on a $u_{k+1} = 2u_k - 3$.

Par hypothèse de récurrence on a $u_k \geq 3$. Ainsi

$$u_{k+1} = 2u_k - 3 \geq 2 \times 3 - 3 = 3.$$

Finalement on a bien $u_{k+1} \geq 3$ et la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.