

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + 2^n$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.

Exercice 3

Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $2^n \geq n + 2$.

Exercice 4

Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $3^n \geq n^2$.

Exercice 5

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{4n}$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{1 + u_n^2}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n < 2$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{et } u_0 = 0$$

Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

Exercice 10 (extrait de ESC 2004)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \geq 1$.
3. Dans cette question, on examine une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
On pose pour tout entier naturel $n, v_n = n + u_n$.
 - (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n .
 - (b) En déduire que la suite (v_n) est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n uniquement.
 - (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel $n, u_n = 2^n - n$.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + n + 1$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout entier naturel n .

On admet les propriétés suivantes :

- f est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$
- Si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.

Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel $n, 1 \leq v_n \leq 2$.
2. Pour tout entier naturel $n, v_{n+1} \leq v_n$.