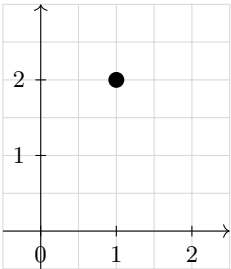


CHAPITRE 10 : FONCTIONS DÉRIVABLES

1 Des points et des trajectoires

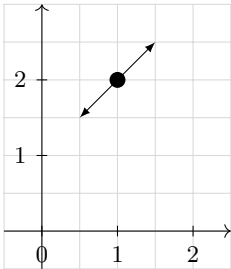
On considère une fonction f dont on connaît un renseignement sur sa représentation graphique.

Cas n°1
un **point**



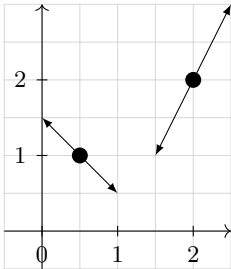
Traduction
mathématique

Cas n°2
Un **point** et
une *trajectoire*



Traduction
mathématique

Cas n°3
Deux **points** et
deux *trajectoires*
différentes.



Traduction
mathématique

2 Calculs de dérivées

2.1 Dérivabilité des fonctions usuelles

Proposition 2.1: Dérivées des fonctions usuelles

Expression de $f(x)$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Expression de $f'(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$

Exemple 1. Donner les dérivées des fonctions suivantes (on ne s'occupera pas de l'ensemble de validité).

$$f(x) = x^3$$

Proposition 2.4

- Dérivée de l'inverse : $\frac{1}{u}$ est dérivable sur en tout point de I où u ne s'annule pas et on a :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

- Dérivée du quotient : $\frac{u}{v}$ est dérivable sur en tout point de I où v ne s'annule pas et on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple 3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne s'occupera pas de l'ensemble de validité).

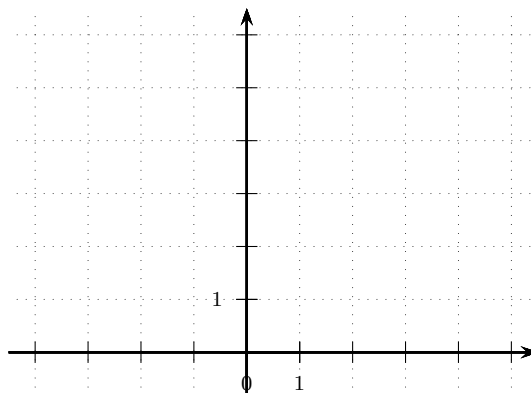
- $f(x) = xe^x$

- $f(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$

- $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Exemple 6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de valeurs ci-contre. Déterminer les équations de tangentes aux points donnés et tracer la courbe de f .

a	-4	-2	1	5
$f(a)$	1	5	3	5
$f'(a)$	1	0	$-\frac{1}{2}$	3



Remarque 7. Connaître les nombres dérivés (et donc les tangentes) nous permet donc de tracer plus précisément la courbe d'une fonction au voisinage de points.

4 Dérivée et variations

4.1 Étude des variations

Théorème 4.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .
2. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
3. f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .
4. Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I .
5. Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I .

Remarque 8.

- Dorénavant, pour étudier les variations d'une fonction, on calcule sa dérivée et on étudie le signe de celle-ci.
- On étudie toujours les variations d'une fonction sur un intervalle ! Par exemple, la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, mais c'est faux de dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode 4.1

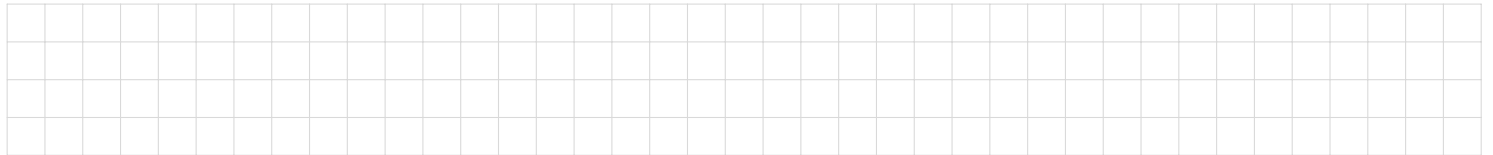
Pour étudier les variations d'une fonction :

1. On détermine la dérivée.
2. Si besoin, on transforme l'écriture de la dérivée pour en étudier le signe.
3. On fait un tableau de signe de cette dérivée.

Exemple 7. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$.



Remarque 9. Une fonction peut être strictement croissante sur I sans que la condition $f' > 0$ soit vérifiée.
ex : Soit f la fonction cube.



Théorème 4.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $f' \geq 0$ sur I et s'il existe qu'un nombre fini de points $x \in I$ tels que $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I .

Remarque 10. Un théorème analogue existe pour les fonctions strictement décroissantes.

Exemple 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x - 1)^5$. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



4.2 Étude des extremums locaux

Définition 4.1: (Rappel)

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

- On dit que f a un maximum local en x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 tel que, si x appartient à ce voisinage :

$$f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que f a un minimum local en x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 tel que, si x appartient à ce voisinage :

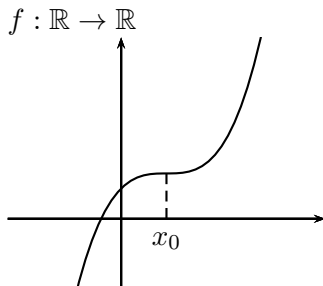
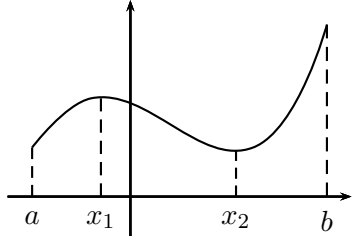
$$f(x) \geq f(x_0)$$

Propriété 4.1

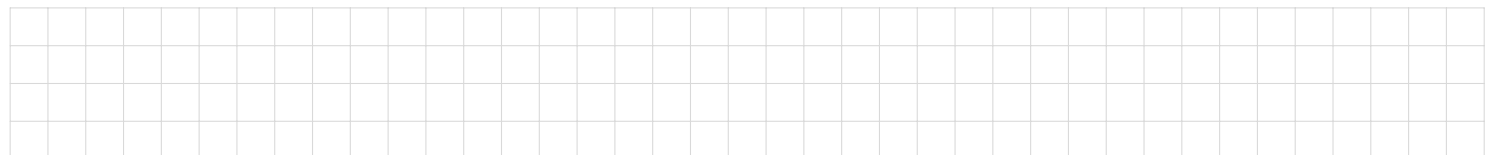
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ un point qui n'est pas une extrémité de I . Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 alors f possède un extremum local en x_0 .

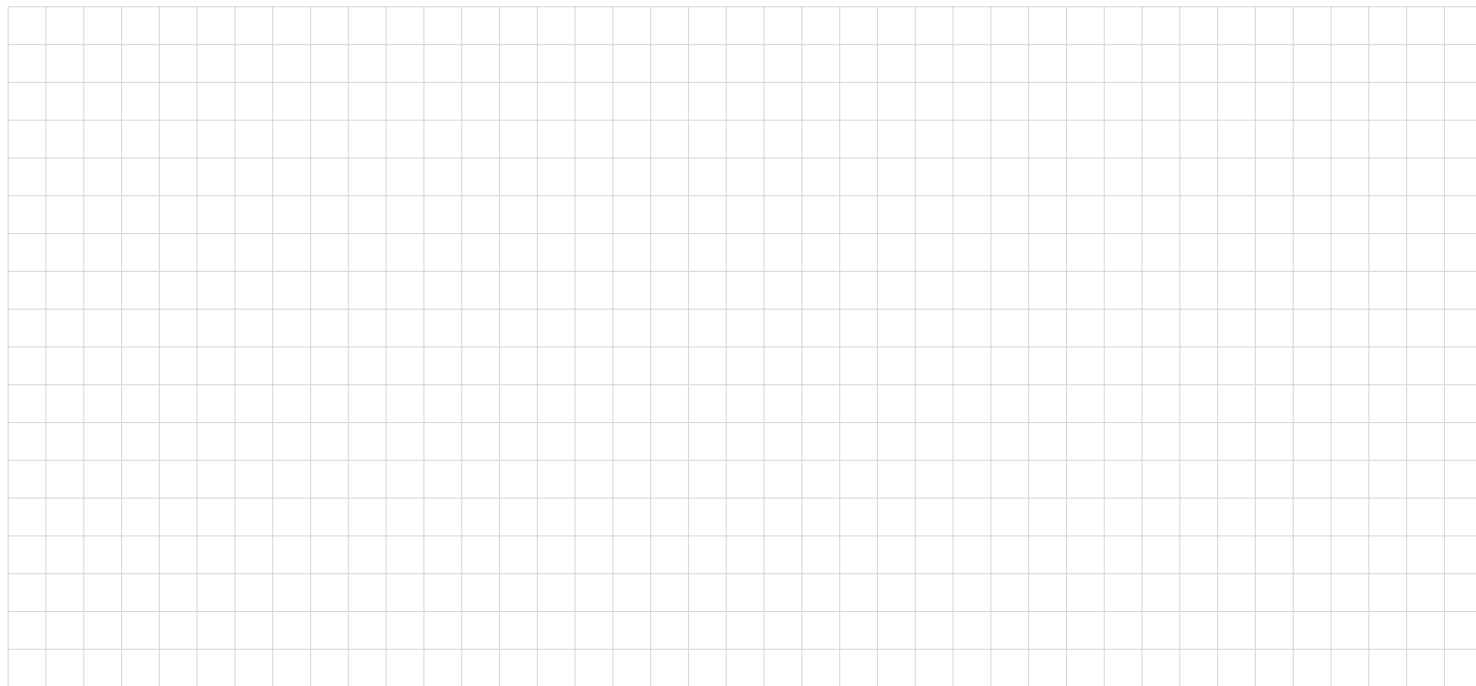
Illustration :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



Exemple 9. Étudier les extremums locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 12$.





5 Dérivées successives

Définition 5.1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si la dérivée f' est dérivable, on dit que f est deux fois dérivable et la dérivée de f' se note f'' ou $f^{(2)}$ et s'appelle la dérivée seconde de f .

Si cette nouvelle dérivée f'' est dérivable, on dit que f est trois fois dérivable et la dérivée de f'' se note $f^{(3)}$ et s'appelle la dérivée troisième de f .

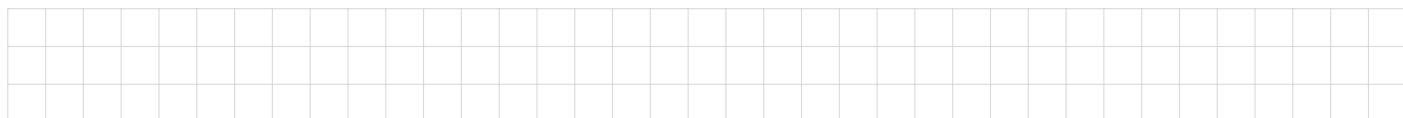
Et ainsi de suite. On définit de cette manière les dérivées successives de f .

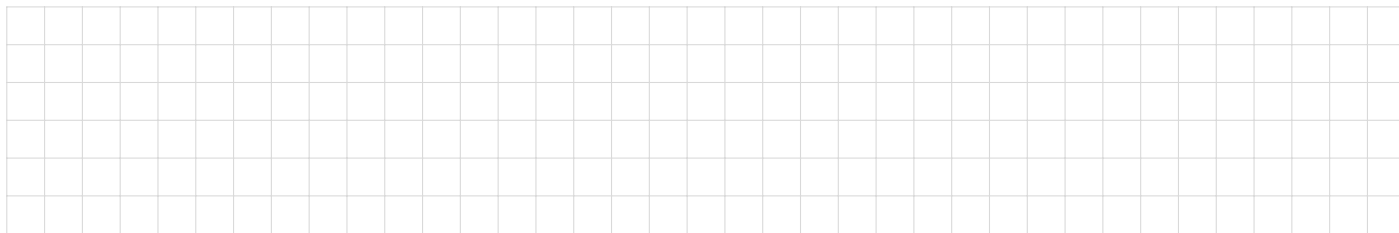
Exemple 10. Calculer la dérivée troisième de la fonction f définie par $f(x) = 18 + \frac{1}{x}$.



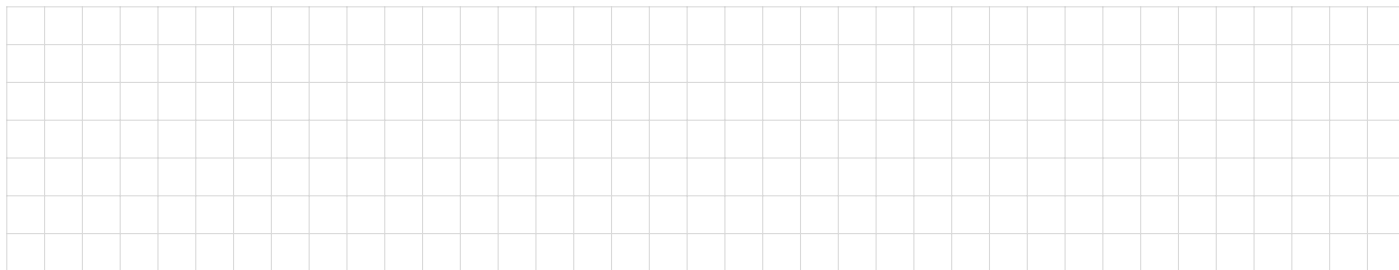
Exemple 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x - (x - 1)^6$.

1. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.





2. Construire alors le tableau de variation de f' . On fera apparaître $f'(2)$.



3. En déduire le signe de f' puis le tableau de variation de f .



6 Convexité

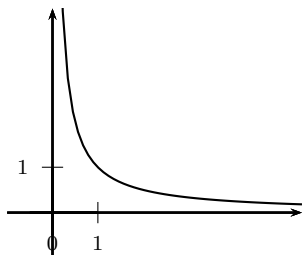
6.1 Fonctions convexes, concaves

Définition 6.1

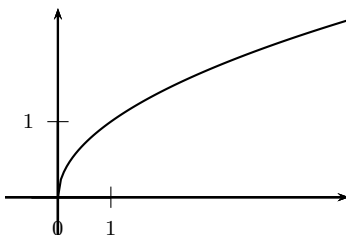
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est convexe sur I si la courbe de f est au-dessous de toutes ses cordes.
- On dit que f est concave sur I si la courbe de f est au-dessus de toutes ses cordes.

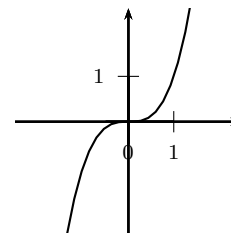
Illustration :



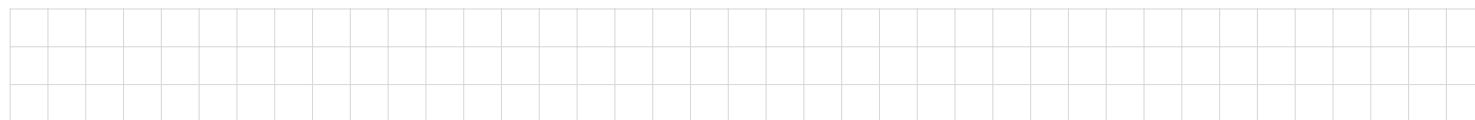
Fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$



Fonction racine sur $\mathbb{R}_+$



Fonction cube sur $\mathbb{R}$



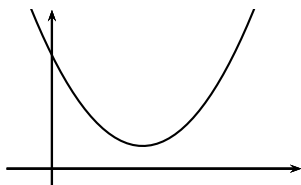
Remarque 11. La courbe d'une fonction convexe est « ouverte vers le haut », celle d'une fonction concave est « ouverte vers le bas ».

Propriété 6.1

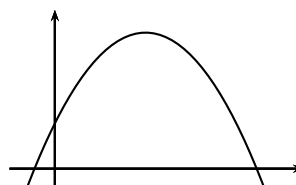
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe de f est au-dessous de ses tangentes.

Illustration :



Fonction convexe



Fonction concave

Théorème 6.1

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

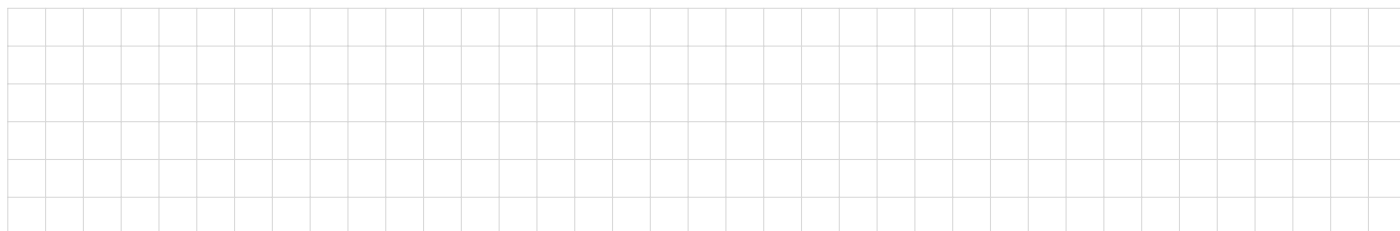
- Si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur I .

Exemple 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3 - 2x - \frac{4}{x}$.

1. Étudier la convexité de f .



2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.



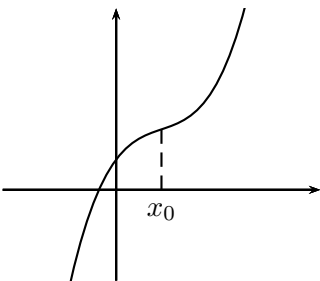
3. Préciser les positions relatives de la tangente et de la courbe.

6.2 Point d'inflexion

Définition 6.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la courbe de f admet un point d'inflexion en $x_0 \in I$ si elle change de convexité en x_0 .

Illustration :



Propriété 6.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Si f est dérivable sur I , la courbe admet un point d'inflexion en x_0 lorsqu'elle traverse sa tangente en x_0 .
- Si f est dérivable deux fois sur I , la courbe admet un point d'inflexion en x_0 lorsque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Exemple 13. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x - 1)^3 + 3x - 7$. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion.

7 Un peu de théorie

Définition 7.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

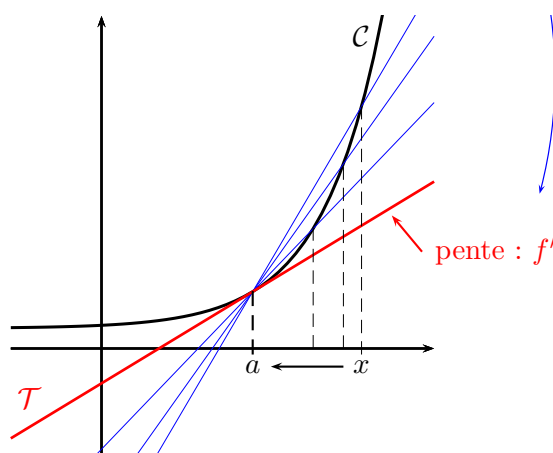
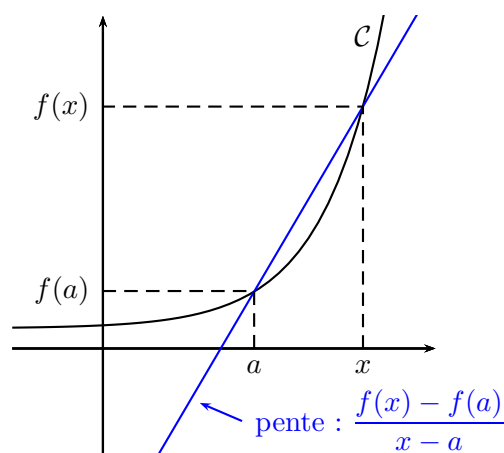
On dit que f est dérivable en a si le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .

Lorsque f est dérivable en a , on note :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et on appelle cette limite le nombre dérivé de f en a .

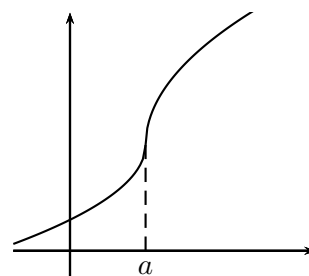
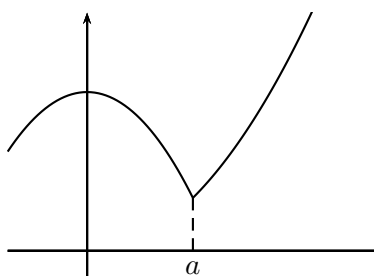
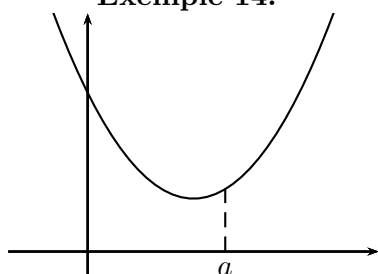
Interprétation graphique :



Remarque 12. • $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente la pente de la corde de la courbe de f passant par les points d'abscisses a et x .

- Si f est dérivable en a , alors la pente de la corde a une limite finie lorsque x tend vers a . Ceci signifie que la corde se rapproche d'une position limite, représentée par la droite $\mathcal{T}$ de pente $f'(a)$ appelée la tangente.

Exemple 14.



Définition 7.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable à droite en a si le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+ .
- On dit que f est dérivable à gauche en a si le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^- .

Remarque 13. • Soit a un point intérieur à I . f est donc dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.

- On pourrait alors définir les demi-tangentes à droite et à gauche.

Exemple 15. La fonction représentée ci-contre est dérivable à droite et à gauche en a (demi-tangentes), mais n'est pas dérivable en a .

