

FEUILLE D'EXERCICES N°13
APPLICATIONS DES DÉRIVÉES



RESUME DES EPISODES PRECEDENTS

- ① Rappeler les formules de calculs des puissances (avec des a et des e) et des racines carrées, des logarithmique népérien
- ② Comment déterminer un ensemble de définition (les 3 questions)
- ③ Rappeler la résolution de $x^2 = a$ suivant les valeurs de a
- ④ Donner les formules de résolution d'une équation de degrés 2 et axes ou tableaux de signes des polynômes de degrés 1 et 2, de $\ln(x)$ et e^x
- ⑤ Comment résoudre une équation ou une inéquation avec $\ln$ et $\exp$
- ⑥ Comment calculer $P_A(B)$, $P(A \cap B)$. Que veut dire deux événements incompatibles ? Que veut dire deux événements indépendants ?
- ⑦ Comment étudier le sens de variation d'une suite
- ⑧ Donner l'équation de la tangente et formulaire des dérivées
- ⑨ Définition de la parité d'une fonction et ses conséquences graphiques



PIQURE DE RAPPEL

Exercice A:

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise.

L'atelier A fabrique 60% des stylos, et parmi ceux-là, 5% possèdent un défaut de fabrication.

De plus, 1% des stylos possèdent un défaut de fabrication et sortent de l'atelier B .

Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements suivants :

A : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier A »

B : « Le stylo a été fabriqué par l'atelier B »

D : « Le stylo possède un défaut de fabrication »

1- Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.

2- Calculer la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication .

3- On prélève un stylo au hasard dans l'atelier B . Quelle est la probabilité qu'il possède un défaut ?

4- On choisit trois stylos au hasard, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'au moins un stylo présente un défaut ?

Exercice B:

Résoudre les inéquations suivantes : $3^n \geq 200$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{10}$

Exercice C:

Résoudre les équations suivantes (pensez aux racines évidentes)

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $5x^2 + 9x + 4 = 0$

c) $-x^2 + \frac{1}{2}x = 0$

d) $-2x^2 + 7x - 6 = 0$

e) $6x^2 + 7x - 1 = 0$

f) $3x^2 + x - 4 = 0$

Exercice 1 :

Étudier les fonctions suivantes : ensemble de définition, sens de variations ,tableau de variations, convexité et allure de courbe.

1- $f(x) = x^2 + 4x - 1$

6- $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

2- $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

7- $f(x) = x \ln(x) - x$

3- $f(x) = \ln(x + 3)$

8- $f(x) = x e^{-x}$

4- $f(x) = e^{-2x}$

9- $f(x) = \ln(\ln(x))$

5- $f(x) = 2^x$

Exercice 2 : un premier exemple de fraction rationnelle

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-5}{x+2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- 2- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?
- 3- Déterminer les limites en -2 . Que peut on conclure ?
- 4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
- 5- Étudier la convexité de f
- 6- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T
- 7- Construire $\mathcal{C}$.

Exercice 3 : un exemple d'asymptote oblique

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- 2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df
- 3- Montrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
- 4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
- 5- Étudier la convexité de f
- 6- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T
- 7- Construire $\mathcal{C}$.

Exercice 4 : Étude avec une fonction auxiliaire

Notons f et g les fonctions définies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x) - x + 1$

- 1- Déterminer Dg et étudier la parité de g .
- 2- Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations sans les limites.
- 3- En déduire le signe de $g(x)$ sur Dg
- 4- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- 5- Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = g(x)$
- 6- Dresser le tableau de variations de f sans les limites

Exercice 5 : Étude d'une fonction avec ln

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- 2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df
- 3- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
- 4- Étudier la convexité de f
- 5- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 puis étudier position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T
- 6- Construire $\mathcal{C}$.

Exercice 6 : Étude d'une fonction avec des exponentielles

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- 2- Écrire f sous forme d'un produit
- 3- Déterminer les limites de f aux bornes de Df
- 4- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
- 5- Étudier la convexité de f
- 6- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
- 8- Étudier position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T
- 9- Construire $\mathcal{C}$.

Exercice 7 :

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$	-1

- 1- La fonction f est-elle continue sur $] -3, +\infty[$?
- 2- Donner un intervalle où f est continue mais pas monotone.
- 3- Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
- 4- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ en justifiant la réponse.
- 5- L'équation $f(x) = 3$ admet-elle une solution unique ?

Exercice 8 :

1-

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	1	-2	3	$-\infty$

- a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier la réponse avec précision.
- b) Déterminer le signe de $f(x)$.

2-

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2	10	1

- a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier la réponse avec précision.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.

3-

x	$-\infty$	-1	1	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	2	-4	-2	

- a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier la réponse avec précision.
b) Déterminer le signe de $f(x)$.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$

- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- On admet que la droite D d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$. Traduire cette information sous forme de limite et déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
- Déterminer les limites de f en 0
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .
- Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
- Étudier les variations de la fonction f sur Df puis dresser le tableau de variations.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
- Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f .

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x$.

- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations sans les limites.
- Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^x - 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- Déterminer Df et étudier la parité de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de Df
- Dresser le tableau des variations de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$
- Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
- Préciser le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .