

CORRECTION DU CONCOURS BLANC N°02

EXERCICE 1.

On considère les suites (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) définies par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4u_n - 8n + 24 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } y_n = 2n - 6$$

1- Calculer u_1 , v_0 , v_1 , x_1 et y_1

$$\text{Pour } n = 0, u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 4 \times 1 - 0 + 24 = 28$$

$$\text{Pour } n = 1, v_1 = 4u_1 - 8 \times 1 + 24 = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 + 24 = -2 - 8 + 24 = 14.$$

$$x_1 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{7}{2}$$

$$y_1 = 2 \times 1 - 6 = -4$$

Conclusion : $u_1 = -\frac{1}{2}$, $v_0 = 28$, $v_1 = 14$, $x_1 = \frac{7}{2}$ et $y_1 = -4$

.....
2- Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}

$$\text{De } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

$$\text{il vient } u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 = \frac{1}{2}u_{n-1} + n - 2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + n - 2.$

.....
3- Écrire un programme Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n

```
n=int(input('n='))
u=1 # u0
for k in range(1,n+1):
    u=1/2*u+k-2
print(u)
```

$$\text{de } u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \text{ on écrit } u_k = \frac{1}{2}u_{k-1} + k - 2$$

.....
4- Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}

$$\text{De } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4u_n - 8n + 24$$

$$\text{il vient } v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4u_{n+1} - 8n - 8 + 24 = 4u_{n+1} - 8n + 16$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8n + 16.$

5- Montrer que (v_n) est géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme puis exprimer v_n en fonction de n

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 8n + 16 \\ &= \left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n + 16 \\ &= 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 \\ &= 2u_n - 4n + 12 \\ &= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) \\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

Conclusion : (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=28$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = 28 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6- Donner l'expression de x_{2n+1} et de $x_{2n}+1$

$$\text{De } \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{il vient } x_{2n+1} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \text{ et } x_{2n}+1 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n+1} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \text{ et } x_{2n}+1 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1$$

7- Donner l'expression de y_{3n} et y_n+1

$$\text{De } \forall n \in \mathbb{N}, y_n = 2n - 6$$

$$\text{il vient } y_{3n} = 2(3n) - 6 = 6n - 6 \text{ et } y_n + 1 = 2n - 6 + 1 = 2n - 5$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, y_{3n} = 6n - 6 \text{ et } y_n + 1 = 2n - 5$$

8- Étudier la monotonie de (x_n) et de (y_n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 7 > 0, \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \text{ et } -\frac{1}{2} < 0 \text{ donc } x_{n+1} - x_n < 0 \text{ et par suite } (x_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n = 2(n+1) - 6 - (2n - 6) = 2n + 2 - 6 - 2n + 6 = 2 \text{ et } 2 > 0 \text{ donc } (y_n) \text{ est croissante}$$

Conclusion : (x_n) est une suite décroissante et (y_n) est une suite croissante.

9- Déterminer la limite de x_n et de y_n en $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 6) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$$

10- Écrire un programme Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche x_n

```
n=int(input('n='))
x=7*(1/2)**n
print(x)
```

cette fois on a une suite définie par son terme général donc pas de for

EXERCICE 2.

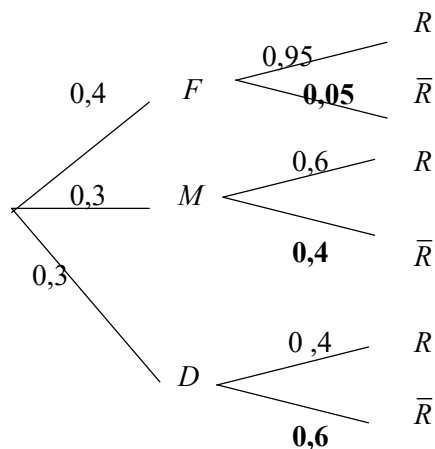
Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site Internet. 40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile. Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

- F : « la grille est de niveau facile »
- M : « la grille est de niveau moyen »
- D : « la grille est de niveau difficile »
- R : « Pierre réussit la grille » et $\bar{R}$ son événement contraire.

1- Traduisons les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.



2- a) Calculons la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.

$$p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

Conclusion:

La probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse est 0,12

b) Calculons la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.

$$p(F \cap \bar{R}) = p(F) \times p_F(\bar{R}) = p(F) \times (1 - p_F(R)) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$$

Conclusion:

La probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas est 0,02

c) Montrons que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
 F, M, D forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(R \cap F) + p(R \cap M) + p(R \cap D) \\ &= p(F) \times p_F(R) + p(M) \times p_M(R) + p(D) \times p_D(R) \\ &= 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 \end{aligned}$$

$$p(R) = 0,68$$

Conclusion:

La probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.

3- Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?

$$p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,68 = 0,32 \neq 0$$

$$p_{\bar{R}}(M) = \frac{p(M \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,32} = \frac{0,12}{0,32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Conclusion:

La probabilité que ce soit une grille de niveau moyen sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée est 0,375

4- Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

$$p(R) = 0,68 \neq 0$$

$$p_R(F) = \frac{p(F \cap R)}{p(R)} = \frac{p(F) \times p_F(R)}{p(R)} = \frac{0,4 \times 0,95}{0,68} = \frac{0,38}{0,68} > \frac{1}{2} \text{ car } \frac{0,38}{0,68} > \frac{0,34}{0,68}$$

Conclusion:

La petite sœur de Pierre a un peu plus d'une chance sur 2 d'avoir raison

EXERCICE 3.

Voir cours

4- Déterminer le signe des expressions suivantes

$$f(x) = 8 - x^3$$

$$Df = \mathbb{R}$$

Pour étudier le signe de f , polynôme de degré 3, je dois trouver une racine évidente puis factoriser et enfin établir un tableau de signes.

$$2 \text{ est racine évidente car } 8 - 2^3 = 8 - 8 = 0$$

donc $f(x)$ se factorise par $(x - 2)$

Factorisons par la méthode de Hörner

	-1	0	0	8
2		-2	-4	-8
	-1	-2	-4	0

$$\text{donc } f(x) = (x - 2)(-x^2 - 2x - 4)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad \Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-4) = 4 - 16 = -12$$

pas de solution

Établissons un tableau de signes

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$-x^2-2x-4$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Rappel: si $\Delta < 0$ le polynôme est du signe de a

$$g(x) = 1 - \ln(x)$$

$$g \text{ existe} \Leftrightarrow x > 0 \text{ donc } Dg = \mathbb{R}_+^*$$

Pour étudier le signe de $1 - \ln(x)$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $1 - \ln(x) \geq 0$

$$1 - \ln(x) \geq 0$$

$$\ln(x) \leq 1$$

$$x \leq e^1 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\text{d'où le signe de } 1 - \ln(x) : \quad \begin{array}{c} + \\ \parallel \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\oplus} \begin{array}{c} - \\ \parallel \\ e \end{array} \rightarrow$$

$$h(x) = (1 - e^x)(e^x + 2)$$

$$Dh = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in Dh, e^x > 0 \text{ et } 2 > 0 \text{ donc } e^x + 2 > 0 \text{ et par suite } h(x) \text{ est du signe de } 1 - e^x$$

Pour étudier le signe de $1 - e^x$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $1 - e^x \geq 0$

$$1 - e^x \geq 0$$

$$e^x \leq 1$$

$$x \leq \ln(1) \quad \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$x \leq 0$$

$$\text{d'où le signe de } h(x) : \quad \xrightarrow{+} \begin{array}{c} \oplus \\ 0 \end{array} \xrightarrow{-}$$

$$i(x) = x - \frac{4}{x}$$

$$i \text{ existe} \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$Di = \mathbb{R}^*$$

Pour étudier le signe de $i(x)$, on doit mettre au même dénominateur

$$i(x) = \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x}$$

Établissons un tableau de signes

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$i(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

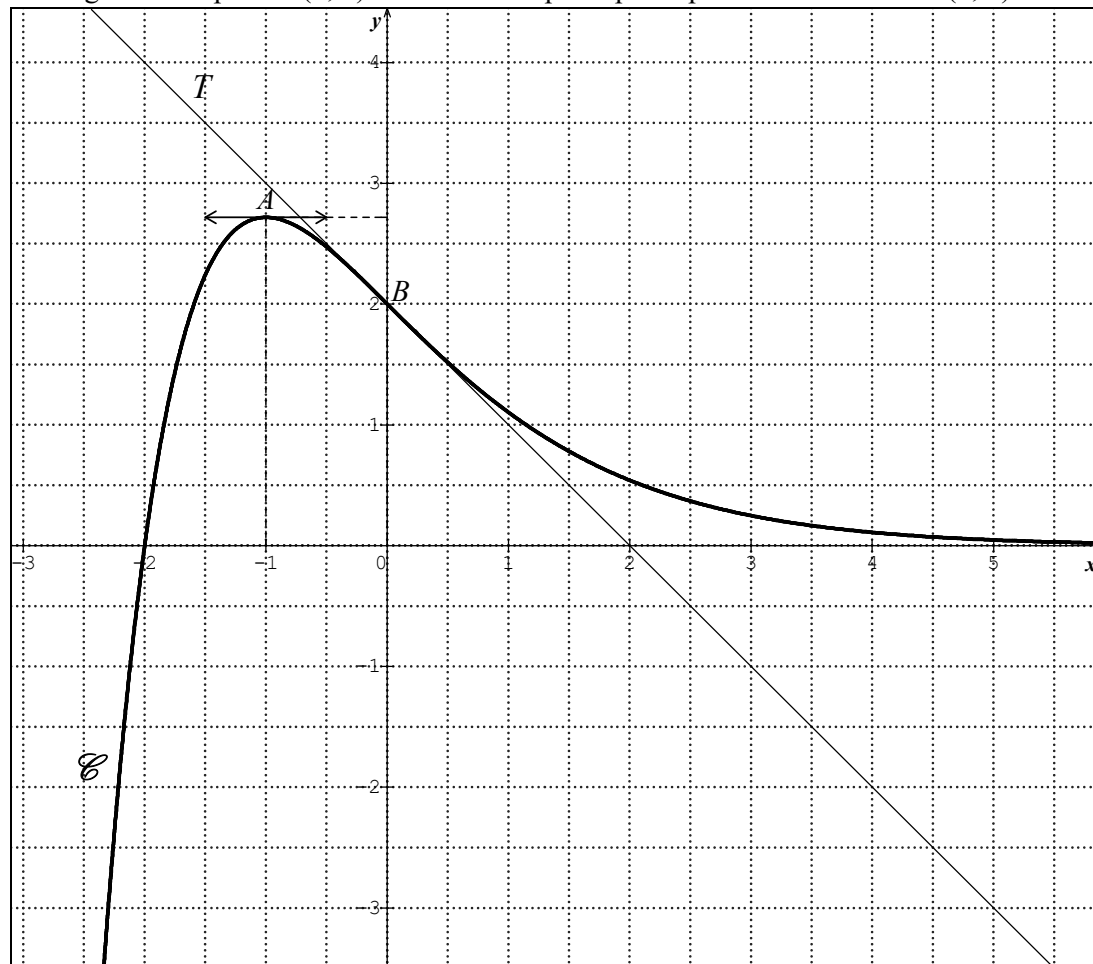
EXERCICE 4.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f .

On sait que :

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(-1; 2,7)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente T au point $B(0; 2)$ à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1; 1)$



1- Déterminer Df

$Df = \mathbb{R}$

2- Donner les limites de f et préciser les asymptotes et/ou les branches infinies éventuelles

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

3- Déterminer $f'(-1)$, $f(0)$ et $f'(0)$

$f'(-1) = 0$ car la tangente en A est horizontale

$f(0) = 2$ ordonnée de B

$f'(0) = \frac{1}{-1} = -1$ en prenant B et le point $(1; 1)$

4- Dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$2,7$	0

5- Établir le tableau de signes de f

signe de $f(x)$: $\xrightarrow{- \quad \oplus \quad +}$
 $\quad \quad \quad -2 \quad \quad \quad \rightarrow$

6- Déterminer une équation cartésienne de tangente de T en utilisant la formule de la tangente

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au d'abscisse 0 est donnée par

$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = -1$ et $f(0) = 2$

donc $T: y = -1(x - 0) + 2$ i.e $y = -x + 2$

Conclusion :

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = -x + 2$

7- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1,5$

Les solutions de l'équation $f(x) = 1,5$ sont les abscisses des points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = 1,5$

$S = \{-1,7 ; 0,5\}$

8- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1,5$

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 1,5$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés en dessous de la droite d'équation $y = 1,5$

$S =]-\infty ; -1,7] \cup [0,5 ; +\infty[$

9- Dresser le tableau de convexité de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	f est concave	B point d'inflexion	f est convexe

EXERCICE 5.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer Df

f existe $\Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Conclusion : $Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

2- Étudier le signe de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$$

Établissons un tableau de signes

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$i(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

3- Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question suivante

4- Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D .

$$f(x) - y_D = \frac{x^2+2x-3}{x+1} - (x+1) = \frac{x^2+2x-3-(x+1)^2}{x+1} = \frac{x^2+2x-3-x^2-2x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

Conclusion : la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = \frac{-4}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-4	$-$	$-$	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x) - y_D$	$+$	$-$	$-$
position	$\mathcal{C}$ est au-dessus de D		$\mathcal{C}$ est en dessous de D

5- Déterminer les limites de f en -1 . Que peut on conclure ?

signe de $x+1$: $\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline -1 \end{array} \rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 + 2x - 3) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1) = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + 2x - 3) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 1) = 0^- \end{cases}$$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

6- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.

f est dérivable sur chaque intervalle de Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\forall x \in Df, f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 1(x^2+2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in Df, (x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+5

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$ donc $\forall x \in Df, x^2+2x+5 > 0$ (signe de $a = 1$ car $\Delta < 0$)

Conclusion :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$

7- Étudier la convexité de f

f' est dérivable sur chaque intervalle de Df comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

$$\begin{aligned} \forall x \in Df, f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x+5)(2 \times 1(x+1))}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2(x+1)((x+1)(x+1) - (x^2+2x+5))}{(x+1)^4} \text{ car } 2x+2 = 2(x+1) \\ &= \frac{2(x+1)(x^2+2x+1 - x^2-2x-5)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2(x+1)(-4)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-8}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-8	$-$		$-$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
convexité	f est convexe		f est concave

Remarque : $(x+1)^3$ a le même signe que $x+1$

8- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T

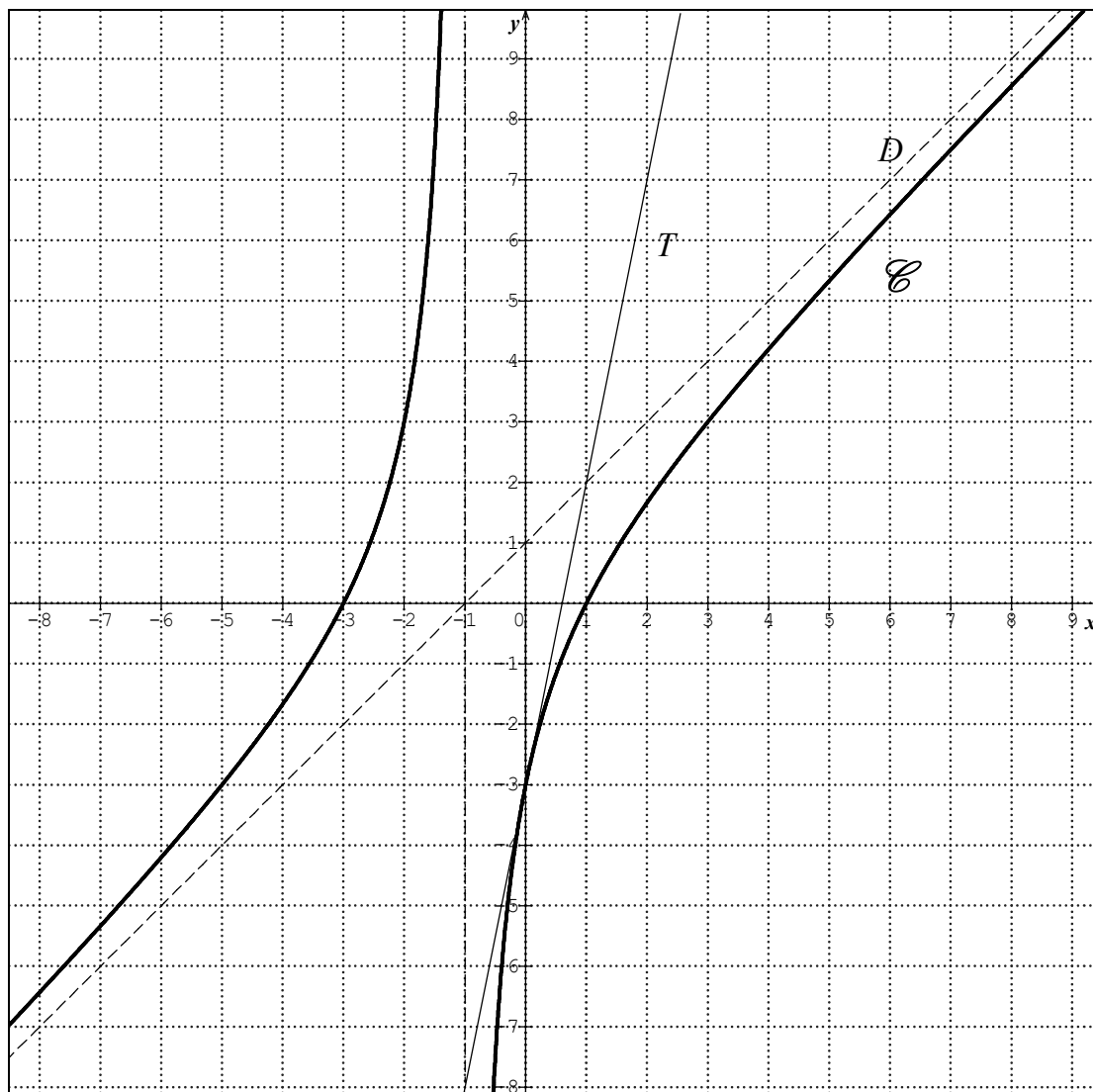
Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par

$$T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{avec } f'(0) = 5 \quad \text{et } f(0) = -3$$

Conclusion $T: y = 5(x-0) - 3 = 5x - 3$

De plus au voisinage de 0, f est concave donc $\mathcal{C}$ est en dessous de T

9- Construire $\mathcal{C}$ et T



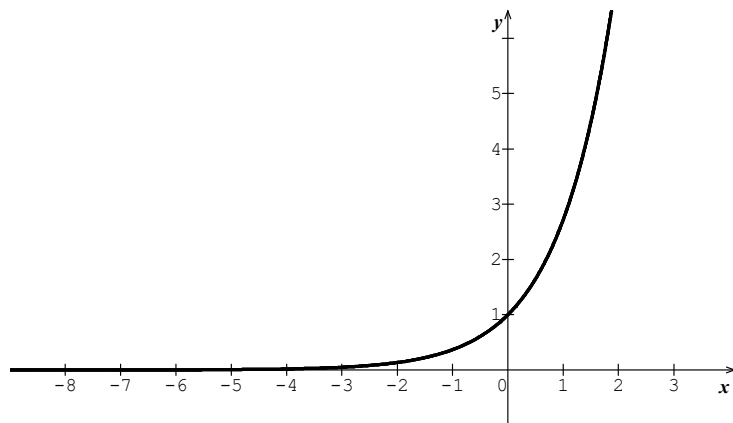
EXERCICE 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df .

f existe $\Leftrightarrow 1+e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -1$ toujours vraie car une exponentielle est toujours strictement positive
 $Df = \mathbb{R}$.

2- Tracer la courbe représentative de l'exponentielle et rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

3- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^x) = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

La droite D' d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$, en $-\infty$

L'étude de la position relative sera faite à la question 4a

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^x) = +\infty \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La droite D d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$

L'étude de la position relative sera faite à la question 4b

4- On définit les droites D d'équation $y=0$ et D' d'équation $y=4$.

a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D'

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D' revient à étudier le signe de $f(x) - y_{D'} = f(x) - 4$

$$f(x) - 4 = \frac{4}{1+e^x} - 4 = \frac{4 - 4 - 4e^x}{1+e^x} = \frac{-4e^x}{1+e^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, -4e^x < 0$ et $1+e^x > 0$ d'où $f(x) - 4 < 0$ et par suite la courbe $\mathcal{C}$ sera en dessous de la droite D'

Conclusion : la courbe représentative de f sera en dessous de la droite d'équation $y = 4$

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D' revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = f(x) - 0$

$$f(x) - y_D = f(x) - 0 = f(x) = \frac{4}{1 + e^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 4 > 0$ et $1 + e^x > 0$ donc $f(x) - y_D > 0$ et par suite $\mathcal{C}$ est au-dessus de D

Conclusion : la courbe représentative de f sera au-dessus de la droite d'équation $y = 0$

5- a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe f'

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, -4e^x < 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$ par suite $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2}$ et $f'(x) < 0$

b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	4	2	0

$$f(0) = \frac{4}{1 + e^0} = \frac{4}{2} = 2$$

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.

Une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ est donnée par

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ avec } f'(0) = -\frac{4}{2^2} = -1 \text{ et } f(0) = 2$$

donc $T: y = -1(x - 0) + 2$ i.e $y = -x + 2$

Conclusion : l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ est $y = -x + 2$

6- a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-4e^x}{(1 + e^x)^2}$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{-4e^x(1 + e^x)^2 - (-4e^x)2e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{4e^x(1 + e^x)(-1 - e^x + 2e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

- b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$$

Erreur! Signet non défini. $x \in \mathbb{R}, 4e^x > 0$ et $(1 + e^x)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $e^x - 1$

Pour étudier le signe de $e^x - 1$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $e^x - 1 \geq 0$

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$x \geq 0 \quad \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

d'où le signe de $e^x - 1$: $\begin{array}{c} - \quad \quad \quad + \\ \quad \quad \oplus \quad \quad \\ \quad \quad 0 \quad \quad \end{array} \rightarrow$

Conclusion :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	f est concave	point d'inflexion (0, f(0))	f est convexe

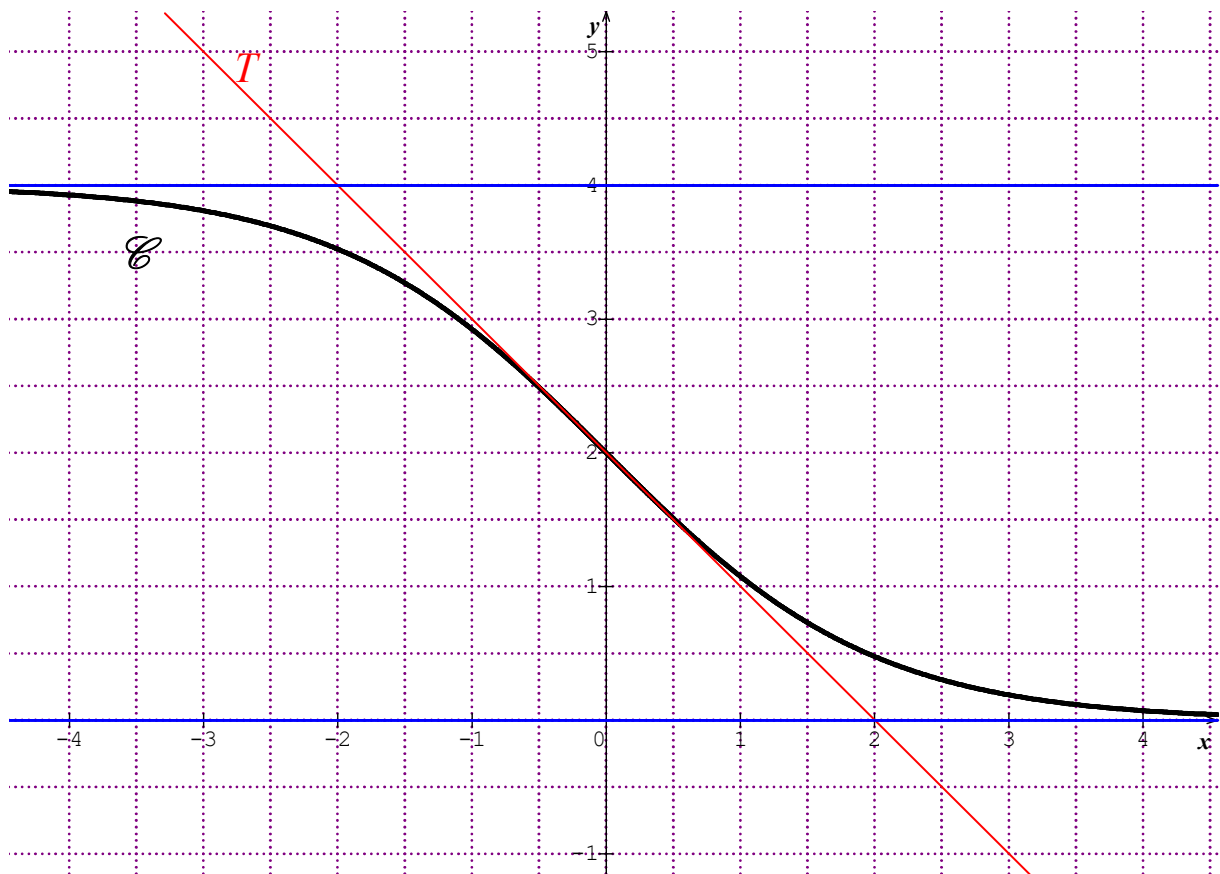
$f''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion de coordonnées (0, 2) car $f(0)=2$

- c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

si $x < 0$, f est concave donc $\mathcal{C}$ est en dessous de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

si $x > 0$, f est convexe donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.

- 7- Tracer l'allure de la courbe représentative de f , les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.



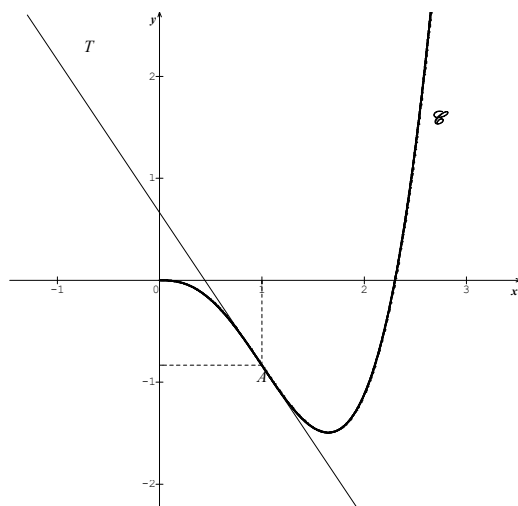
EXERCICE 7.

f est définie par $f(x) = x^3 \left(\ln(x) - \frac{5}{6} \right)$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df

f existe $\Leftrightarrow x > 0$ $Df = \mathbb{R}_+^*$

2- Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé et la droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 par le logiciel



Par lecture graphique donner la limite de f en $+\infty$

par lecture graphique on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Que représente A pour la courbe ?

La courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en A , donc A est un point d'inflexion.

3- Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$

f est dérivable sur Df comme produit de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \forall x \in Df, f'(x) &= 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{5}{6} \right) + x^3 \times \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{5}{6} \right) + x^2 \\ &= x^2 \left(3\ln(x) - \frac{5}{2} + 1 \right) \\ &= x^2 \left(3\ln(x) - \frac{3}{2} \right) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in Df, f'(x) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$

4- Étudier le sens de variation de f

$$\forall x \in Df, f'(x) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$$

$$\forall x \in Df, 3x^2 > 0 \text{ donc } f'(x) \text{ est du signe de } \ln(x) - \frac{1}{2}$$

Pour étudier le signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $\ln(x) - \frac{1}{2} \geq 0$

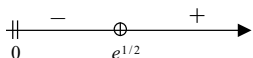
$$\ln(x) - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\ln(x) \geq \frac{1}{2}$$

$x \geq e^{\frac{1}{2}}$ car $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$$x \geq \sqrt{e}$$

rappel: $\sqrt{e} = e^{1/2}$

signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$: 

Conclusion : f est croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ et f est décroissante sur $]0, \sqrt{e}]$

5- Dresser le tableau de variation de f

x	0	$e^{1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	$f(e^{1/2})$	$+\infty$

$$f(\sqrt{e}) = (e^{\frac{1}{2}})^3 \left(\ln(e^{\frac{1}{2}}) - \frac{5}{6} \right) = e^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right) = -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}}$$

6- Étudier la convexité de f et retrouver le point A .

$$\forall x \in Df, f'(x) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$$

f est dérivable sur Df comme produit de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f''(x) = 6x \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + 3x^2 \frac{1}{x} = 3x(2\ln(x) - 1 + 1) = 6x\ln(x)$$

$\forall x \in Df, 6x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	
convexité	f est concave	A point d'inflexion $(1, f(1))$	f est convexe

$$f(1) = 1 \left(\ln(1) - \frac{5}{6} \right) = -\frac{5}{6} \text{ car } \ln(1) = 0$$