

CONCOURS
BLANC N°02
Durée 4h

Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1.

On considère les suites (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) définies par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4u_n - 8n + 24$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } y_n = 2n - 6$$

- 1- Calculer u_1 , v_0 , v_1 , x_1 et y_1 .
- 2- Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .
- 3- Écrire un programme Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n
- 4- Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} .
- 5- Montrer que (v_n) est géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme puis exprimer v_n en fonction de n
- 6- Donner l'expression de x_{2n+1} et de $x_{2n} + 1$.
- 7- Donner l'expression de y_{3n} et $y_n + 1$.
- 8- Étudier la monotonie de (x_n) et de (y_n)
- 9- Déterminer la limite de x_n et de y_n en $+\infty$
- 10- Écrire un programme Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche x_n

EXERCICE 2.

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site Internet. 40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile. Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

- F : « la grille est de niveau facile »
- M : « la grille est de niveau moyen »
- D : « la grille est de niveau difficile »
- R : « Pierre réussit la grille » et $\bar{R}$ son événement contraire.

- 1- Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2-
 - a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
 - b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
 - c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
- 3- Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
- 4- Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 3.

1- **Recopier** et compléter sur votre copie les tableaux suivants :

FONCTIONS USUELLES	
$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	
$mx + p$	
x	
x^n	
$\frac{1}{x}$	
$\sqrt{x}$	
e^x	
$\ln(x)$	

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	
$u - v$	
$k \times u$ k constante réelle	
$u \times v$	
u^n	
$\frac{1}{u}$	
$\frac{u}{v}$	
$\sqrt{u}$	
e^u	
$\ln(u)$	

2- Compléter **sur votre copie** le formulaire suivant :

$$a > 0, b > 0, \ln(ab) =$$

$$a > 0, b > 0, \ln\left(\frac{a}{b}\right) =$$

$$x \in \mathbb{R}, a > 0, \ln(a^x) =$$

$$b > 0, \ln\left(\frac{1}{b}\right) =$$

$$\ln \dots = 0$$

$$\ln \dots = 1$$

$$\ln 2 \approx$$

$$\ln 3 \approx$$

$$e^{a+b} =$$

$$e^{a-b} =$$

$$e^{-a} =$$

$$(e^a)^b =$$

$$e^0 =$$

$$e^1 = \dots \approx \text{ et } e^{-1} \approx$$

$$\forall x \in \dots e^{\ln(x)} =$$

$$\forall x \in \dots \ln(e^x) =$$

3- Déterminer le signe des expressions suivantes :

$$f(x) = 8 - x^3$$

$$g(x) = 1 - \ln(x)$$

$$h(x) = (1 - e^x)(e^x + 2)$$

$$i(x) = x - \frac{4}{x}$$

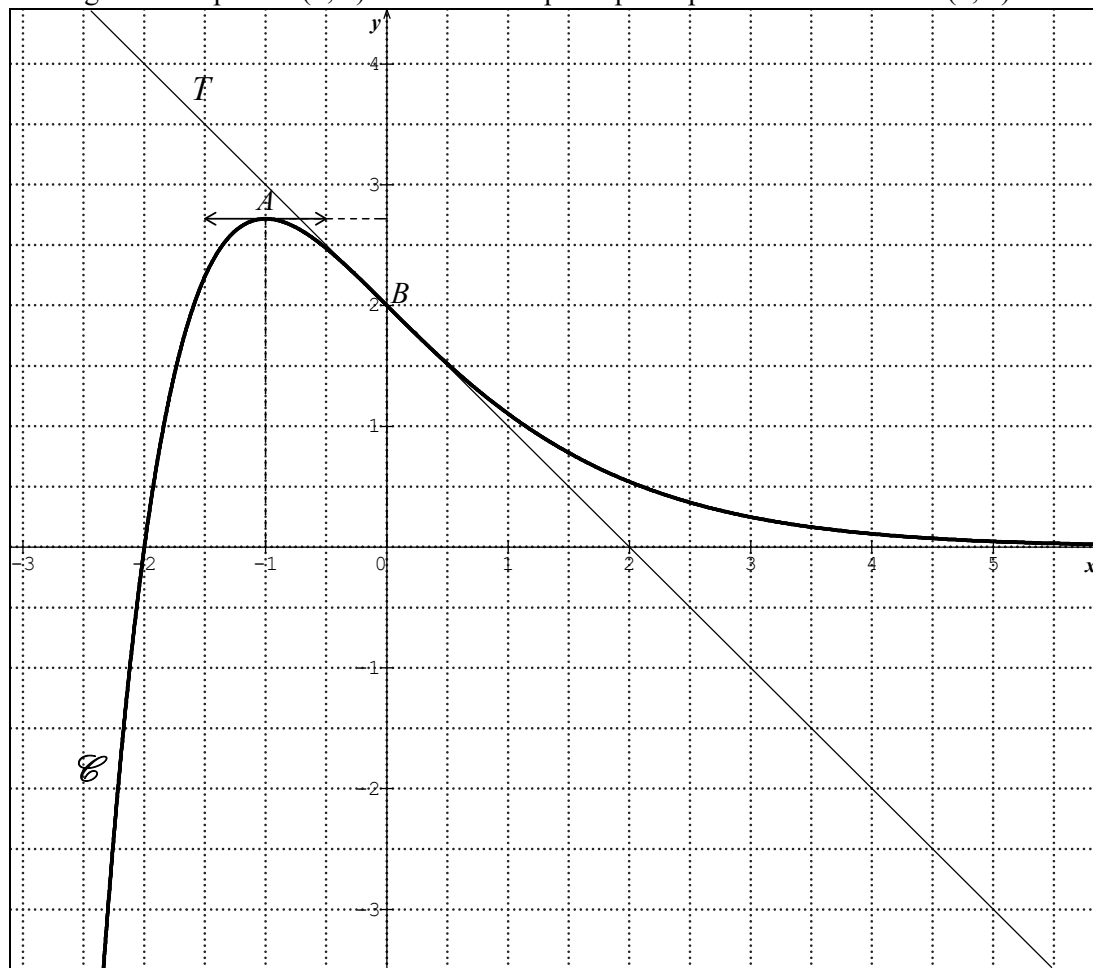
EXERCICE 4.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f .

On sait que :

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(-1; 2,7)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente T au point $B(0; 2)$ à la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1; 1)$



- 1- Déterminer Df
- 2- Donner les limites de f et préciser les asymptotes et/ou les branches infinies éventuelles
- 3- Déterminer $f'(-1)$, $f(0)$ et $f'(0)$
- 4- Dresser le tableau de variations de f
- 5- Établir le tableau de signes de f
- 6- Déterminer une équation cartésienne de tangente de T en utilisant la formule de la tangente
- 7- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1,5$
- 8- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1,5$
- 9- Dresser le tableau de convexité de f

EXERCICE 5.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer Df .
- 2- Étudier le signe de $f(x)$
- 3- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Que peut on conclure ?
- 4- Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
- 5- Déterminer les limites de f en -1 . Que peut on conclure ?
- 6- Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations.
- 7- Étudier la convexité de f
- 8- Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T
- 9- Construire $\mathcal{C}$ et T .

EXERCICE 6.

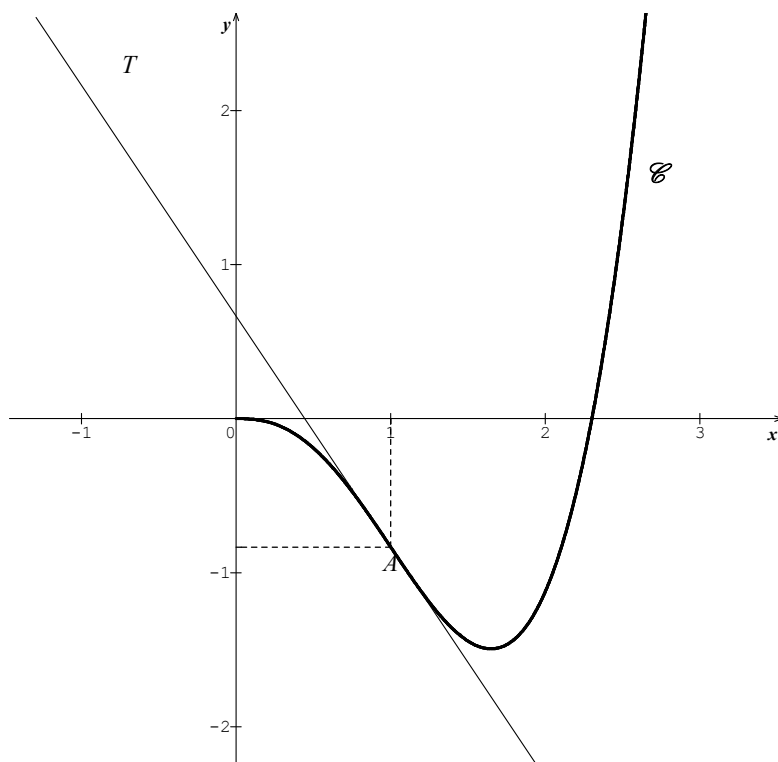
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df .
- 2- Tracer la courbe représentative de l'exponentielle et rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$
- 3-
 - a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
 - b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 4- On définit les droites D d'équation $y = 0$ et D' d'équation $y = 4$.
 - a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D'
 - b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D
- 5-
 - a) Calculer la dérivée de f et déterminer le signe f'
 - b) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
 - c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
- 6-
 - a) Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$
 - b) En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
 - c) Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
- 7- Tracer l'allure de la courbe représentative de f , les asymptotes D et D' et la tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 7.

On donne f définie par $f(x) = x^3 \left(\ln(x) - \frac{5}{6} \right)$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de f noté Df
- 2- Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous par un logiciel dans un repère orthonormé et la droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1



- Par lecture graphique donner la limite de f en $+\infty$
- Que représente A pour la courbe ?

- 3- Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = 3x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)$
- 4- Étudier le sens de variation de f
- 5- Dresser le tableau de variation de f
- 6- Étudier la convexité de f et retrouver le point A .