

CHAPITRE 11: APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I- ETUDE DU SENS DE VARIATION DES FONCTIONS

1- SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I alors :

- (a) Si $\forall x \in I; f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I
- (b) Si $\forall x \in I; f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I
- (c) Si $\forall x \in I; f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Remarque: f est monotone si f est seulement croissante ou seulement décroissante.

POINT METHODE :COMMENT DÉTERMINER LES VARIATIONS D'UNE FONCTION

- On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$
- On étudie le signe de $f'(x)$
- On en déduit les variations de f et on conclut par des phrases. Si le tableau de variation est demandé, on le dresse.



Un tableau de variation doit toujours comporter les limites sauf indications contraires !!!

Exemple: étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x$ puis dresser son tableau de variation.

2- EXTREMUM

On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J : f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

Remarque: Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a , alors f admet un extremum local en a .

POINT METHODE : FAIRE LE LIEN ENTRE EXTREMA ET DERIVÉE

- On repère les extrema locaux de f en lesquels f' doit s'annuler en changeant de signe.
- On repère la nature de chaque extremum:
 - si c'est un maximum, la dérivée doit être positive "avant" et négative "après"
 - si c'est un minimum, la dérivée doit être négative "avant" et positive "après".

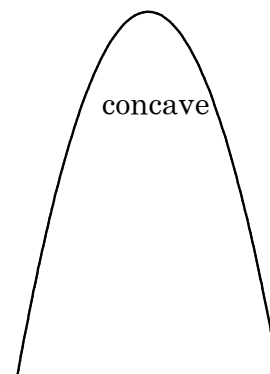
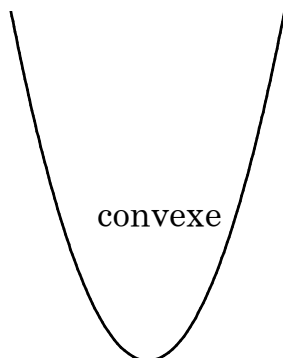
Exemple : voir le tableau de variations de l'exemple précédent

II- CONVEXITÉ

1- DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que la fonction **f est convexe** sur I si la portion de courbe représentative correspondant à tout segment $[a, b]$ inclus dans I est en dessous de la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$
- On dit que la fonction **f est concave** sur I si la portion de courbe représentative correspondant à tout segment $[a, b]$ inclus dans I est au-dessus de la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$



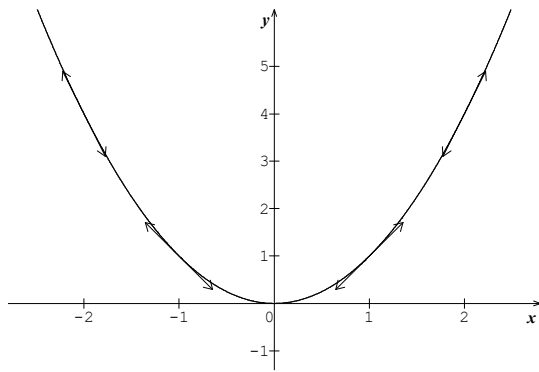
POINT METHODE : COMMENT REPERER UNE FONCTION CONVEXE OU CONCAVE

- On regarde l'allure de la courbe.
 - si elle fait une "bosse", f est concave
 - si elle fait un "U", f est convexe

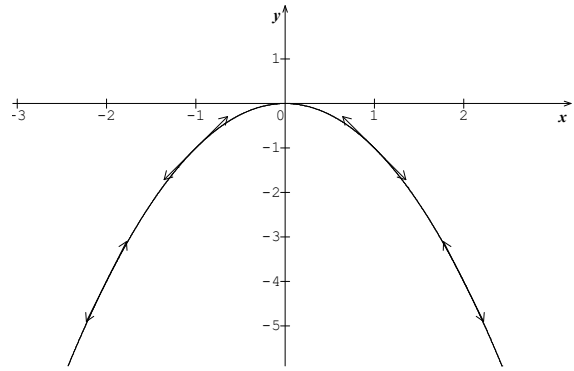
2- PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I

- f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes.
- f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes.



convexe



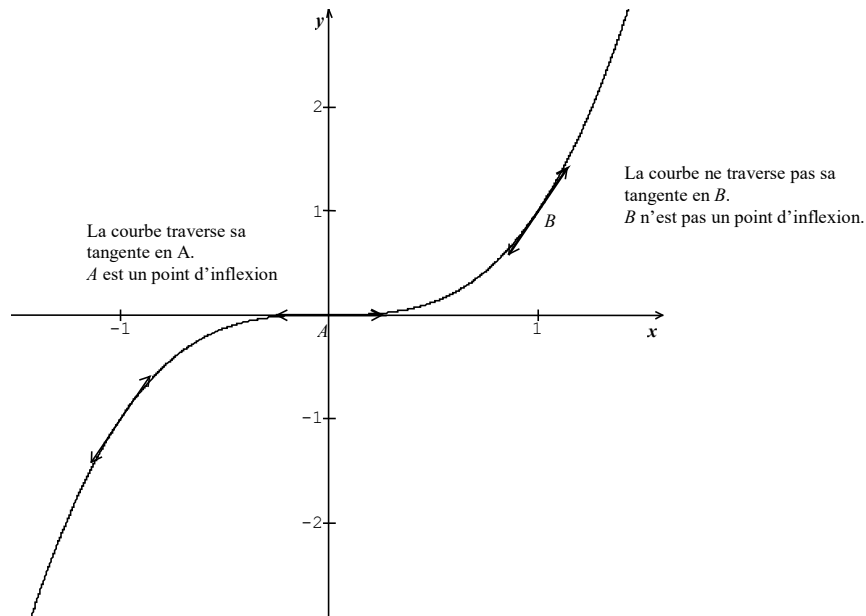
concave

3- POINT D'INFLEXION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

Soit $a \in I$

On dit que le point $M(a, f(a))$ est un point d'inflexion de \mathcal{C} lorsque f passe de "convexe" à "concave" ou inversement.



4- THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I .

Un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe

f est convexe si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$

f est concave si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$

POINT METHODE :COMMENT ÉTUDIER LA CONVEXITÉ D'UNE FONCTION

- On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f' puis on calcule $f''(x)$
- On étudie le signe de $f''(x)$ (souvent par un tableau de signe)
- On en déduit la convexité de f

Exemple 1:

$$f(x) = x^3$$

Exemple 2:

$$f(x) = x^4$$

III- BIJECTION

1- NOTION DE CONTINUITÉ

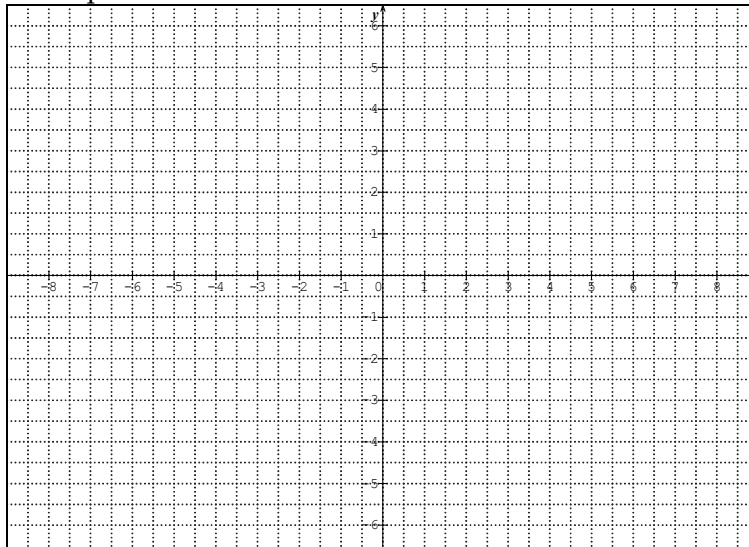
Une fonction est continue sur un intervalle I si :

- ♦ elle est définie sur cet intervalle I
- ♦ Sa courbe représentative \mathcal{C} se trace “ sans lever le crayon ” sur cet intervalle

Exemples :

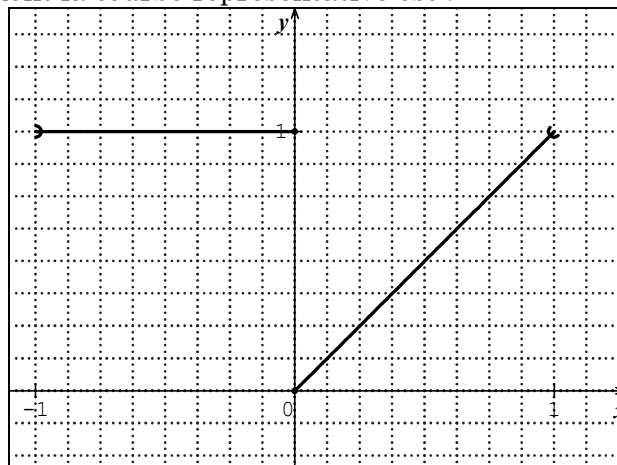
❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = -x + 3$

Tracer sa courbe représentative



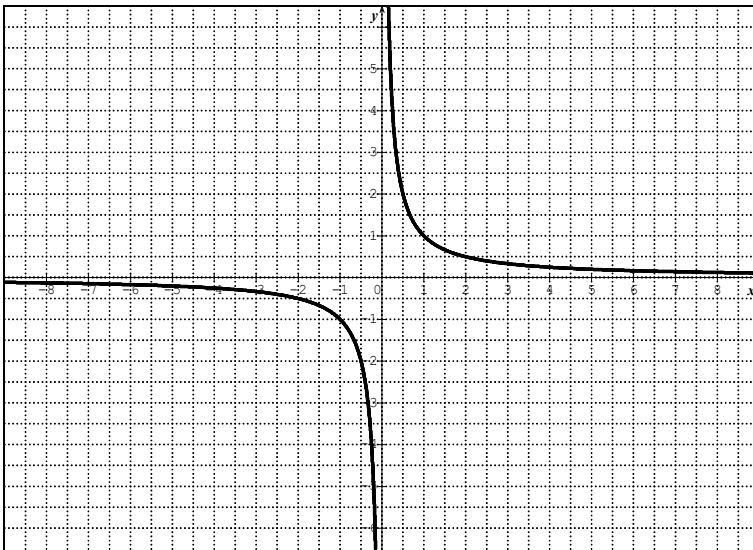
Est-elle continue sur \mathbb{R} ?

❷ Soit f la fonction dont la courbe représentative est :



Est-elle continue sur $[-1 ; 1]$?

- ③ Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ dont l'allure est donnée ci-dessous



Est-elle continue sur \mathbb{R}^* ?

Propriétés admises

- a) Toutes les fonctions que vous connaissez (affine, carrée, inverse, cube, puissance, racine, logarithme, exponentielle ..) sont continues sur les intervalles de leurs ensembles de définition.
- b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I alors :
- $f + g$ est continue sur I
 - $f - g$ est continue sur I
 - $f * g$ est continue sur I
 - e^f est continue sur I
 - $\frac{f}{g}$ est continue sur I si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$
 - \sqrt{f} est continue sur I si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$
 - $\ln(f)$ est continue sur I si $\forall x \in I, f(x) > 0$

2- THÉORÈME DE LA BIJECTION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
 Si f est continue sur I ,
 Si f strictement monotone sur I
 Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que les limites aux bornes de Df
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur \mathbb{R} puis que l'une appartient à l'intervalle $[2 ; 3]$.
4. Etablir le tableau d'étude de signes de f